Przykład wykorzystania dodatku SOLVER[1] w arkuszu Excel do rozwiązywania zadań programowania matematycznego

Firma produkująca samochody zaciągnęła kredyt inwestycyjny w wysokości 5 mln zł na zainstalowanie nowoczesnych linii montażowych: niemieckiej (N), szwedzkiej (S) i polskiej (P). Dobowe zdolności montażowe (w sztukach), w zależności od wysokości nakładów inwestycyjnych przeznaczonych na zainstalowanie linii montażowych danego typu, przedstawiono w tabeli.
Analiza rynku pokazała, że każda z linii montażowych pozwala uzyskać jednakowe zyski w przeliczeniu na 1 samochód.
Należy zdecydować o podziale kredytu pomiędzy poszczególne programy inwestycyjne, tak aby firma osiągnęła maksymalną, dobową zdolność montażową, zakładając, że można kredyt podzielić w częściach całkowitych, czyli na 6 części: 0, 1, 2, 3, 4 lub 5 mln zł.

Tabela *Dane do przykładu*

Nakłady (w mln zł)		0	1	2	3	4	5
Zdolności montażowe linii (w szt.)	N	0	6	8	12	10	7
	S	0	5	8	11	14	17
	P	0	4	7	12	12	13

Rozwiązanie

Zbudujemy najpierw model matematyczny naszego zagadnienia. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

n - liczba linii montażowych;

m - liczba możliwych części kredytu, które można przeznaczać na poszczególne programy inwestycyjne;

$\mathbf{A} = \lfloor a_{ij} \rfloor_{n \times m}$ - macierz, której elementy a_{ij} stanowią wartość zdolności montażowych i-tej linii, przy zainwestowaniu j-tej części kredytu ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,m-1}$);

x_{ij} - binarna zmienna decyzyjna, która przyjmuje wartość 1 jeżeli na i-tą linię montażową przeznaczono j-tą część kredytu, 0 - w przeciwnym przypadku.

[1] UWAGA !!! Dodatek *Solver* nie jest instalowany przy standardowej instalacji Excel'a. Jeżeli w menu **Narzędzia** nie jest dostępna opcja **Solver** wówczas należy wybrać z menu **Narzędzia** polecenie **Dodatki**, po czym z listy dostępnych dodatków wybrać opcję **Solver**. Jeśli **Solver** nie znajduje się na liście, Excel zapyta, czy chcemy go zainstalować. Po zainstalowaniu *Solver* dostępny będzie w menu **Narzędzia**, opcja **Solver**.

Zauważmy, iż można przyjąć, że indeks j oznacza (w mln zł) przydzieloną wartość części kredytu, więc $j = \overline{0, m-1}$. W takim ujęciu m-1 oznacza wartość kredytu. Ponumerujemy również linie montażowe od 1 do 3 przyjmując, że linia N ma numer 1, linia S - numer 2, a linia P - numer 3.
Zadanie podziału kredytu między linie montażowe będzie miało zatem postać:

(*) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \cdot x_{ij} \to \max$$

przy ograniczeniach:

(**) $$\sum_{j=0}^{m-1} x_{ij} \le 1 \quad , \; i = \overline{1, n}$$

(***) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m-1} j \cdot x_{ij} = m-1$$

(****) $$x_{ij} \in \{0,1\}, \; i = \overline{1, n}, \; j = \overline{0, m-1}$$

Funkcja celu (*) maksymalizuje zdolności montażowe firmy po przydzieleniu odpowiednich części kredytu do poszczególnych rodzajów linii. Zestaw ograniczeń postaci (**) wymusza, że dla każdej z linii montażowych zostanie przydzielona nie więcej niż jedna część kredytu. Ograniczenie (***) gwarantuje, że łączna suma części kredytu przydzielonych do poszczególnych linii montażowych będzie równa wartości kredytu. Ograniczenie (****) stanowi warunek na binarność zmiennych decyzyjnych.

Zauważmy, że dla naszego zadania mamy następujące dane:

- n=3;
- m=6;
- macierz $\mathbf{A} = \lfloor a_{ij} \rfloor_{n \times m}$ ma postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 & 12 & 10 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ 0 & 4 & 7 & 12 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

Zadanie decyzyjne będzie miało zatem następującą postać:

(*) $$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{5} a_{ij} \cdot x_{ij} \to \max$$

przy ograniczeniach:

(**) $$\sum_{j=0}^{5} x_{ij} \leq 1 \quad , \ i = \overline{1,3}$$

(***) $$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{5} j \cdot x_{ij} = 5$$

(****) $$x_{ij} \in \{0,1\}, \ i = \overline{1,3}, \ j = \overline{0,5}$$

czyli

(*) $$\begin{aligned} & 0 \cdot x_{10} + 6 \cdot x_{11} + 8 \cdot x_{12} + 12 \cdot x_{13} + 10 \cdot x_{14} + 7 \cdot x_{15} + \\ & + 0 \cdot x_{20} + 5 \cdot x_{21} + 8 \cdot x_{22} + 11 \cdot x_{23} + 14 \cdot x_{24} + 17 \cdot x_{25} + \\ & + 0 \cdot x_{30} + 4 \cdot x_{31} + 7 \cdot x_{32} + 12 \cdot x_{33} + 12 \cdot x_{34} + 13 \cdot x_{35} \to \max \end{aligned}$$

przy ograniczeniach:

(**) $$\begin{aligned} & x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 1 \\ & x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 1 \\ & x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 1 \end{aligned}$$

(***) $$\begin{aligned} & 0 \cdot x_{10} + 1 \cdot x_{11} + 2 \cdot x_{12} + 3 \cdot x_{13} + 4 \cdot x_{14} + 5 \cdot x_{15} + \\ & + 0 \cdot x_{20} + 1 \cdot x_{21} + 2 \cdot x_{22} + 3 \cdot x_{23} + 4 \cdot x_{24} + 5 \cdot x_{25} + \\ & + 0 \cdot x_{30} + 1 \cdot x_{31} + 2 \cdot x_{32} + 3 \cdot x_{33} + 4 \cdot x_{34} + 5 \cdot x_{35} = 5 \end{aligned}$$

(****) $$x_{ij} \in \{0,1\}, \ i = \overline{1,3}, \ j = \overline{0,5}$$

Aby rozwiązać to zadanie posłużymy się *Solver'em* z arkusza kalkulacyjnego Excel.
W tym celu, w komórkach arkusza zdefiniowano opisywany problem (patrz Rysunek 8.1):

- macierz **A** znajduje się w komórkach B4:G6;
- zmienne decyzyjne x_{ij} znajdują się w komórkach B10:G12;
- funkcja celu znajduje się w komórce D1 i jest zapisana za pomocą formuły: „=SUMA.ILOCZYNÓW(B4:G6*B10:G12)”;
- lewe strony zestawu ograniczeń (**) znajdują się w komórkach B16:B18, tzn. w komórce B16 znajduje się formuła : „=SUMA(B10:G10)”, w komórce B17 formuła : „=SUMA(B11:G11)”, a w komórce B18 formuła : „=SUMA(B12:G12)”;
- lewa strona ograniczenia (***) znajduje się w komórce B20, tzn. znajduje się tam formuła:
  „=B10*0+C10*1+D10*2+E10*3+F10*4+G10*5+B11*0+C11*1+D11*2+E11*3+F11*4+G11*5+B12*0+C12*1+D12*2+E12*3+F12*4+G12*5”.

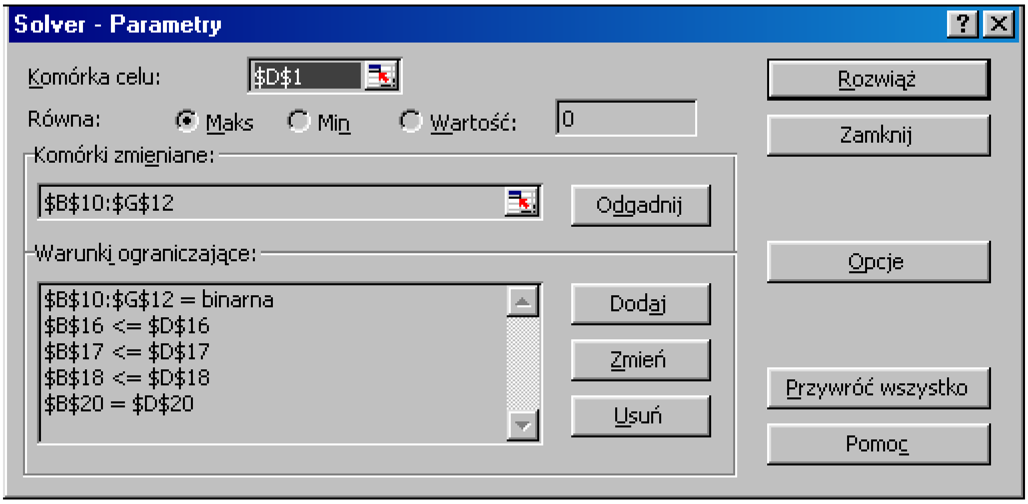
E11 = 0

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		FUNKCJA CELU :		0				
2		MACIERZ A=[aij] :						
3		j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	
4	i=1	0	6	8	12	10	7	
5	i=2	0	5	8	11	14	17	
6	i=3	0	4	7	12	12	13	
7								
8		ZMIENNE DECYZYJNE xij:						
9		j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	
10	i=1	0	0	0	0	0	0	
11	i=2	0	0	0	0	0	0	
12	i=3	0	0	0	0	0	0	
13								
14								
15		Ograniczenia (**) :						
16		0	<=	1				
17		0	<=	1				
18		0	<=	1				
19		Ograniczenie (***) :						
20		0	"="	5				
21								

Rysunek 8.1 *Zdefiniowanie problemu podziału kredytu inwestycyjnego między linie montażowe*

Aby dokończyć definicję naszego zadania oraz je rozwiązać należy:

- W menu **Narzędzia** wybrać polecenie **Solver**. Zostanie wyświetlone okno **Solver-Parametry** (patrz Rysunek 8.2);
- W polu **Komórka celu** wpisać D1 lub zaznaczyć w arkuszu komórkę D1 (funkcja celu). Wybrać opcję **Maks**;
- W polu **Komórki zmieniane** wpisać B10:G12 lub zaznaczyć w arkuszu komórki B10:G12 (zmienne decyzyjne);



Rysunek 8.2 *Zdefiniowane zadanie wyznaczania maksymalnych zdolności montażowych fabryki przy zadanych ograniczeniach*

- Kliknąć przycisk **Dodaj.** Pojawi się okno dialogowe **Dodaj warunek ograniczający** (por. Rysunek 8.3). W polu **Adres komórki** wpisać A14 lub zaznaczyć komórkę B16. Komórka B16 musi być mniejsza lub równa 1. Domyślną relacją w polu **Ograniczenia** jest <= (mniejsze lub równe) i nie trzeba jej zmieniać. W polu obok relacji wpisać adres komórki D16. Kliknąć przycisk **Dodaj**.

Rysunek 8.3 *Wygląd okna dialogowego dodawania ograniczeń*

- W polu **Adres komórki** wpisać B17 lub zaznaczyć komórkę B17. Komórka B17 musi być mniejsza lub równa 1. Domyślną relacją w polu **Ograniczenia** jest <= (mniejsze lub równe) i nie trzeba jej zmieniać. W polu obok relacji wpisać adres komórki D17. Kliknąć przycisk **Dodaj**. W polu **Adres komórki** wpisać B18 lub zaznaczyć komórkę B18. Komórka B18 musi być mniejsza lub równa 1. Domyślną relacją w polu **Ograniczenia** jest <= (mniejsze lub równe) i nie trzeba jej zmieniać. W polu obok relacji wpisać adres komórki D18. Kliknąć przycisk **Dodaj**. W polu **Adres komórki** wpisać B20 lub zaznaczyć komórkę B20. Komórka B20 musi być równa 5. Zmienić relację w polu **Ograniczenia** na = (równe). W polu obok relacji wpisać adres komórki D20. Kliknąć przycisk **Dodaj**. W polu **Adres komórki** wpisać B10:G12 lub zaznaczyć komórki B10:G12. Komórki B10:G12, zawierające zmienne decyzyjne, muszą mieć wartości binarne. Zmienić warunek w polu **Ograniczenia** na **bin** (binarna). Kliknąć przycisk **Ok**.
- Otrzymamy zdefiniowane zadanie w oknie **Solver-Parametry** (patrz Rysunek 8.2) powiązane z modelem zapisanym w arkuszu z Rysunku 8.1.

Po kliknięciu przycisku **Rozwiąż** Solver rozwiąże nasze zadanie przypisując optymalne wartości zmiennym decyzyjnym jak na Rysunku 8.4.

I11 =

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		FUNKCJA CELU :		23				
2		MACIERZ A=[aij] :						
3		j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	
4	i=1	0	6	8	12	10	7	
5	i=2	0	5	8	11	14	17	
6	i=3	0	4	7	12	12	13	
7								
8		ZMIENNE DECYZYJNE xij:						
9		j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	
10	i=1	0	1	0	0	0	0	
11	i=2	0	1	0	0	0	0	
12	i=3	0	0	0	1	0	0	
13								
14								
15		Ograniczenia (**) :						
16		1	<=	1				
17		1	<=	1				
18		1	<=	1				
19		Ograniczenie (***) :						
20		5	"="	5				
21								

Rysunek 8.4 *Optymalny podział kredytu inwestycyjnego na linie montażowe maksymalizujący zdolności montażowe firmy*

Z Rysunku 8.4 odczytujemy, że wartości trzech zmiennych decyzyjnych są niezerowe, a mianowicie: $x_{11}^{*}=1$, $x_{21}^{*}=1$, $x_{33}^{*}=1$. Pozostałe zmienne mają wartość 0. Wartość funkcji celu dla rozwiązania optymalnego odczytujemy z komórki D1 i wynosi ona 23. Jest to maksymalna możliwa zdolność montażowa fabryki po rozdysponowaniu zaciągniętego kredytu inwestycyjnego w wysokości 5 mln zł między linie montażowe w sposób następujący (odczytujemy te wartości z interpretacji zmiennych decyzyjnych): $x_{11}^{*}=1$ oznacza, że na linię nr 1 (N) przydzielamy 1 mln zł, $x_{21}^{*}=1$ oznacza, że na linię nr 2 (S) przydzielamy również 1 mln zł, $x_{33}^{*}=1$ oznacza, że na linię nr 3 (P) przydzielamy 3 mln zł.

Uwagi końcowe

Należy dodać, że dodatek *Solver* może być wykorzystany do rozwiązywania zarówno zadań liniowych, jak i nieliniowych oraz ciągłych i dyskretnych. Rodzaj funkcji (liniowa, nieliniowa) jest rozpoznawany przez Excel'a i automatycznie dobierana jest odpowiednia metoda rozwiązania. Natomiast warunki, co do typu zmiennych decyzyjnych ustala użytkownik poprzez wprowadzenie ich w oknie dialogowym **Dodaj warunek ograniczający** (Rysunek 1.3.4). Mianowicie w oknie tym znajduje się lista rozwijana (por. Rysunek 8.3), na której znajdują się następujące elementy: „<=”, „=”, „>=”, „**int**”, „**bin**”. Wybranie „**int**” oznacza, że zmienna decyzyjna, której adres komórki wpisano w polu **Adres komórki** będzie miała wartości całkowitoliczbowe, a wybranie „**bin**” oznacza, że zmienna decyzyjna, której adres komórki wpisano w polu **Adres komórki** będzie miała wartości binarne.