PRZEDMIOT : ***EFEKTYWNOŚĆ SYSTEMÓW INFORMATYCZNYCH***

Temat:

Elementy matematyki finansowej

PROWADZĄCY :

dr inż. Zbigniew TARAPATA

Zbigniew.Tarapata@isi.wat.edu.pl

http://tarapata.strefa.pl

Hasło do materiałów na stronie WWW podaje wykładowca !

Wykład: Elementy Matematyki Finansowej

Plan Wykładu

1 Znaczenie czasu w ocenie efektywności inwestycji

2 Procent prosty i składany

3 Dyskonto proste i składane

4 Nominalna i efektywna stopa procentowa

5 Wartość przyszła pieniądza

6 Wartość bieżąca pieniądza

7 Stopa procentowa a inflacja

1. Znaczenie czasu w ocenie efektywności inwestycji

- W procesie inwestycyjnym istotnym elementem stanowiącym przesłankę racjonalizującą proces decyzyjny w przedsiębiorstwie jest między innymi czas.
- Im wcześniej zwróci się nam zainwestowany kapitał, tym szybciej będzie go można wykorzystać do finansowania innych inwestycji uzyskując z nich dochód.
- „Zamrożenie” kapitału przez dłuższy okres nie tylko pozbawia nas dodatkowego kapitału z innych źródeł, ale ze względu na istniejącą inflację, odzyskany pieniądz posiada inną wartość niż w chwili jego zainwestowania.
- Wniosek: czas wpływa na wartość pieniądza. Wartość ta jest różna w różnych momentach w przyszłości.
- Oceniając efektywność projektów inwestycyjnych bardzo często dokonujemy porównań bieżących nakładów inwestycyjnych z przyszłymi dochodami. W takich przypadkach musimy jednak uwzględniać zmienną wartość pieniądza w czasie zapewniając porównywalność czasową składników rachunku finansowego.
- Można to osiągnąć sprowadzając wartość strumieni pieniądza na określony moment. Zazwyczaj jest to moment sporządzania racjonalizacji decyzji inwestycyjnych.

2 Procent prosty i składany

W celu obliczenia należnych odsetek od kredytu za kolejne okresy wyznaczane datami ich płatności, powinno skorzystać się ze wzoru:

$$I_t = P \cdot i \cdot \frac{t}{360} \tag{2.1}$$

I_t – odsetki od kredytu należne po t dniach;
P – kwota zaciągniętego kredytu;
i – roczna stopa procentowa, (1 rok równa się 360 dni);
t – okres pomiędzy kolejnymi płatnościami odsetek .

Aby obliczyć stopę procentową i_t kredytu za t dni korzystamy z zależności:

$$i_t = \frac{I_t}{P} = /(2.1)/ = i \cdot \frac{t}{360} \tag{2.2}$$

Przykład 2.1

Pożyczamy 100 tys zł a za 4 miesiące będziemy musieli zwrócić 110 tys zł. Ile wynosi roczna stopa procentowa kredytu?

Rozwiązanie

P=100 tys;
I_t = 110 tys-100 tys= 10 tys;
t= 4·30 dni=120 dni.

Korzystając ze wzoru (2.1) obliczamy i:

$$10 = 100 \cdot i \cdot \frac{120}{360} \quad \Rightarrow \quad i = 0.3 = 30\%$$

■

W przypadku <u>lokat</u> możemy mieć do czynienia z różnymi sposobami naliczania odsetek.

- Jeżeli odsetki w całym okresie trwania lokaty naliczane są od tej samej podstawy równej początkowej kwocie lokaty, to mamy sytuację odsetek prostych nazywanych **procentem prostym**.
- Natomiast, gdy całkowity okres lokaty podzielony jest na podokresy, a odsetki za kolejne podokresy naliczane są od początkowej kwoty lokaty powiększonej o odsetki naliczone za poprzednie podokresy, wtedy mamy do czynienia z odsetkami składanymi zwanymi **procentem składanym**.

<u>Dodawanie odsetek do kwoty lokaty nazywa się **kapitalizowaniem odsetek**.</u>

Z kapitalizacją odsetek wiąże się pojęcie **okresu bazowego**. Jest on równy okresowi, po upływie którego doliczane są odsetki a otrzymana suma jest podstawą do naliczania odsetek w następnym okresie bazowym.

<u>Dla odsetek prostych</u>, końcową wartość lokaty P_n obliczamy ze wzoru:

(2.3) $$P_n = P_0 \cdot (1 + n \cdot i) = P_0 + P_0 \cdot n \cdot i = P_0 + I$$

P_0 – początkowa wartość lokaty;
n – ilość okresów bazowych;
i – oprocentowanie lokaty za jeden okres bazowy;
I – odsetki za cały okres trwania lokaty.

<u>Dla odsetek składanych</u>, końcowa wartość lokaty P_n jest obliczana ze wzoru:

(2.4) $$P_n = P_0 \cdot (1 + i)^n = P_0 + P_0 \cdot \left[(1 + i)^n - 1\right] = P_0 + I$$

Przykład 2.2

Załóżmy, że bank nalicza i kapitalizuje odsetki co kwartał. Początkowa kwota lokaty wynosi 15 tys zł, a roczna stopa procentowa wynosi 24%.
Należy obliczyć wartość lokaty po upływie pół roku.

<u>Rozwiązanie</u>

Naliczanie i kapitalizowanie odsetek co kwartał wiąże się z procentem składanym, gdzie okres bazowy wynosi 3 miesiące (t=90 dni). Rozważmy dwa okresy bazowe (n=2).
Oprocentowanie za 3 miesiące obliczamy ze wzoru (2.2):

$$i_{90} = 0.24 \cdot \frac{90}{360} = 0.06 = 6\%.$$

Aby obliczyć wartość lokaty po upływie pół roku korzystamy ze wzoru (2.4):

$$P_2 = 15 \cdot (1 + 0.06)^2 = 16.854$$

■

Zależność (2.4) dotyczy przypadku tzw. **kapitalizacji zgodnej**. Występuje ona wtedy, gdy okres kapitalizacji jest taki sam jak okres stóp procentowych.
W pozostałych przypadkach występuje **kapitalizacja niezgodna**.
W takim przypadku, końcową wartość lokaty P_n wyraża się wzorem:

(2.5) $$P_n = P_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}$$

3. Dyskonto proste i składane

Obliczanie wartości początkowej P_0 kapitału na podstawie jego wartości końcowej P_n nazywane jest **dyskontowaniem**. Różnica P_n-P_0 nazywana jest **dyskontem**.
W zależności od rodzaju oprocentowania mówimy o **dyskoncie prostym** lub **składanym**.
Przypadek procentu prostego po przekształceniu wzoru (2.3):

(2.9) $$P_0 = \frac{P_n}{1 + n \cdot i}$$

Przypadek procentu składanego po przekształceniu wzoru (2.4):

(2.10) $$P_0 = \frac{P_n}{(1+i)^n}$$

W dyskontowaniu, stopa procentowa *i* za jeden okres zwana jest **stopą dyskontową**.

Przykład 2.3

Jaką kwotę należy zainwestować, aby po 2 latach otrzymać 110 tys zł, jeżeli stopa procentowa wynosi 20% . Założyć kapitalizację roczną odsetek.

Rozwiązanie

$$P_0 = \frac{110}{(1+0.2)^2} \cong 76.389\ tys.$$

■

4. Nominalna i efektywna stopa procentowa

Banki, jako oprocentowanie lokat podają nominalną, roczną stopę procentową oraz częstotliwość kapitalizowania odsetek. Na przykład lokata 12-to miesięczna, stopa procentowa 32 % w stosunku rocznym, odsetki kapitalizowane co kwartał.
Częstość kapitalizacji odsetek powoduje, że kapitał zdeponowany w banku przyrasta szybciej niż 32 % w ciągu roku.

Rzeczywisty przyrost kapitału będziemy definiować efektywną stopą procentową.

Jeżeli przez i_e oznaczymy efektywną stopę procentową to, gdy odsetki od lokaty były kapitalizowane częściej niż raz do roku.:

(2.12) $$I = P_0 \cdot i_e$$

(2.13) $$i_e = \frac{I}{P_0} = \frac{P_0 \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]}{P_0} = (1+i)^n - 1$$

gdzie *I* - odsetki za cały okres trwania lokaty.

Dla naszego przykładu, efektywna stopa procentowa i_e wynosi:

$$i_e = \left(1 + \frac{0.32}{4}\right)^{4 \cdot 1} - 1 = (1+0.08)^4 - 1 = 0.36 = 36\%$$

Obliczamy je wykorzystując (2.2):

$$i_t = 0.32 \cdot \frac{90}{360} = 0.08$$

W przypadku, gdy odsetki są płacone rzadziej niż raz na rok, efektywna stopa procentowa będzie równa rocznej stopie procentowej.

Oznacza to, że okresem bazowym będzie 1 rok.

Obliczamy i_e ze wzoru:

(2.17) $i_e = (1+i)^{1/n} - 1$

Zależność ta pozwala obliczyć wielkość efektywnej stopy procentowej, gdy zainwestowany kapitał przyrasta o stały procent nie częściej niż raz na rok.

Przykład 2.4

Ile wynosi efektywna (roczna) stopa procentowa, jeżeli w wyniku zainwestowania 10 tys zł po 2 latach otrzymaliśmy z powrotem 15 tys zł.

Rozwiązanie

Zysk z inwestycji wynosi 15 tys – 10 tys =5 tys, czyli mamy następujące dane:

I=5 tys;
n=2;
P_0=10 tys;
P_2=15 tys.

Stopa procentowa i za cały okres trwania inwestycji wynosi:

$$i = \frac{5}{10} = 0.5 = 50\%$$

Wykorzystując zależność (2.17) obliczamy stopę efektywną i_e:

$$i_e = (1+0.5)^{1/2} - 1 \cong 0.2247 = 22.47\%$$

■

5. Wartość przyszła pieniądza

Wartość przyszła (Future Value – FV) określa, jaka będzie w przyszłości wartość pieniądza zainwestowanego obecnie.

Załóżmy, że lokujemy 1 000 zł w banku na początku roku na 5 lat z roczną stopą procentową 10 % przy rocznej kapitalizacji odsetek.

Przyszłe wartości zainwestowanej kwoty wynoszą:

- Z końcem 1 roku: $1000 \cdot (1+0.1) = 1100$
- Z końcem 2 roku: $1000 \cdot (1+0.1)^2 = 1210$
- Z końcem 3 roku: $1000 \cdot (1+0.1)^3 = 1331$
- Z końcem 4 roku: $1000 \cdot (1+0.1)^4 = 1464.1$
- Z końcem 5 roku: $1000 \cdot (1+0.1)^5 = 1610.5$.

Ogólny wzór określający wartość pieniądza w n-tym momencie w przyszłości ma następującą postać[1]:

(2.18) $P_n = P_0 \cdot (1+i)^n = P_0 \cdot q^n$

n – moment w przyszłości, dla którego jest liczona wartość końcowa pieniądza;
P_0 – wartość początkowa;
P_n – przyszła wartość kapitału;
i – stopa procentowa dla okresu bazowego;
q -roczny współczynnik procentowy (1+i).

[1] Uważny Czytelnik spostrzeże, że podany wzór po raz pierwszy pojawił się w (2.4) przy okazji omawiania procentu złożonego. Warto tutaj również zaznaczyć, że w przypadku wartości przyszłej pieniądza, aktualnym pozostają zależności (2.5) i (2.6).

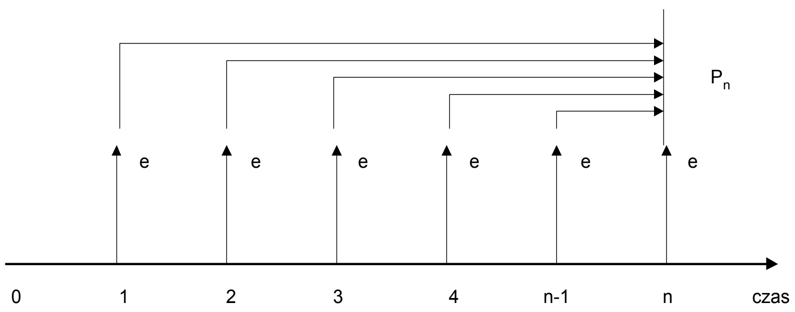
Jeżeli pod koniec każdego roku będziemy lokować tę samą kwotę e, wtedy ich łączna wartość w n-tym momencie w przyszłości wyraża się następującym wzorem:

$$P_n = e \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \tag{2.19}$$

gdzie wyrażenie $\frac{1-q^n}{1-q}$ oznacza czynnik oprocentowujący równe, roczne płatności w czasie n.
Powyższa zależność określa wartość przyszłą **renty płaconej z dołu typu annuity**.

Wartość przyszła **renty płaconej z góry typu annuity** obliczamy korzystając z następującego wzoru:

$$P_n = e \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \tag{2.20}$$



Rysunek Istota wartości przyszłej

Przykład 2.5

Załóżmy rozpatrywać zaciągnięcie kredytu w wysokości P_0 w dwóch bankach na okres n miesięcy.
Nominalne oprocentowanie kredytu za każdy miesiąc w obu bankach jest takie samo.
Pierwszy bank wymaga, aby odsetki od kredytu były płacone raz przy zwrocie kredytu, natomiast w drugim banku należy odsetki płacić co miesiąc.
W którym banku koszt kredytu jest większy.

Rozwiązanie

Niech i oznacza miesięczne, nominalne oprocentowanie kredytu.
W pierwszym banku wielkość płaconych odsetek I_1 wynosi:

$$I_1 = P_0 \cdot n \cdot i$$

Jest to jednocześnie przyszła wartość odsetek, ponieważ zgodnie z wymaganiami są one płacone pod koniec okresu kredytowania.

Rozważając kredyt w drugim banku należy zauważyć, że z obliczoną wyżej wartością I_1 można jedynie porównać wartość przyszłą odsetek na koniec trwania kredytu płatnych co miesiąc w równych wysokościach (czyli w postaci renty rocznej typu annuity z płatnością z dołu).
W tym celu wykorzystamy wzór (2.19):

$$I_2 = e \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$e=i \cdot P_0$ – wartość raty odsetkowej w każdym miesiącu;
$q=1+i$.

Podstawiając powyższe wyrażenia do wzoru na I_2 otrzymamy:

$$I_2 = P_0 \cdot i \cdot \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = P_0 \cdot i \cdot \frac{1-(1+i)^n}{-i} = P_0 \cdot \left((1+i)^n - 1\right)$$

Ponieważ $i>0$ oraz $(1+i)^n-1>n \cdot i$ [2] stąd

$I_2>I_1$.

Oznacza to, że koszt kredytu w drugim banku jest większy od kosztu kredytu w banku pierwszym.

■

Przykład 2.6

Załóżmy, że chcemy zaciągnąć kredyt w wysokości P_0 w jednym z dwóch banków na okres n miesięcy. W obu bankach stopa procentowa jest taka sama, a odsetki należy płacić po upływie każdego miesiąca.
W pierwszym banku całą kwotę kredytu należy spłacić jednorazowo na koniec n-tego miesiąca. Drugi bank wymaga spłatę kredytu w równych ratach kapitałowych pod koniec każdego miesiąca.
W którym banku koszt kredytu jest większy?

<u>*Rozwiązanie*</u>

Podobnie jak w Przykładzie 2.5, wartość strumieni pieniężnych związanych z kredytami będziemy odnosić do momentu końca trwania okresu kredytowania. Jednak w przeciwieństwie do poprzedniego przykładu, ze względu na fakt różnych form spłaty kredytu, powinno uwzględnić się nie tylko wartość przyszłą odsetek ale również rat kapitałowych.

[2] Wyjaśnienie nierówności $(1+i)^n-1>n \cdot i$ opiera się na wzorze dwumiennym Newtona:

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot i^k = \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot i^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} \cdot i^2 + \ldots > \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot i^1 =$$
$$1 + n \cdot i$$

czyli $(1+i)^n - 1 > (1+n \cdot i) - 1 = n \cdot i$

W przypadku pierwszego banku wartość płaconych odsetek i spłaty kredytu na koniec n-tego miesiąca obliczamy ze wzoru:

$$P_0 + P_n = /(2.19)/ = P_0 + e \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

gdzie
P_0 – wartość obecna kredytu;
P_n – wartość przyszłą płaconych odsetek;
$e=i \cdot P_0$ – wielkość płaconych odsetek;
$q=1+i$.
Uwzględniając powyższe oznaczenia otrzymamy:

(2.17)

$$P_0 + P_n = P_0 + i \cdot P_0 \cdot \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = P_0 + P_0 \cdot \left((1+i)^n - 1\right) = P_0 \cdot (1+i)^n$$

Dla drugiego banku obliczenia się komplikują. Mianowicie na koniec każdego miesiąca płacimy poza odsetkami również raty kapitałowe. Harmonogram dokonywanych płatności jest w tym przypadku następujący:

odsetki + *raty kapitałowe*

- Płatność na koniec 1-szego miesiąca: $P_0 \cdot i \quad + \quad \frac{1}{n} \cdot P_0$;
- Płatność na koniec 2-giego miesiąca: $\left(P_0 - \frac{1}{n} \cdot P_0\right) \cdot i \; + \frac{1}{n} \cdot P_0$;
- Płatność na koniec 3-ciego miesiąca: $\left(P_0 - 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot P_0\right) \cdot i + \frac{1}{n} \cdot P_0$;
- ....
- Płatność na koniec k-tego miesiąca: $\left(P_0 - (k-1) \cdot \frac{1}{n} \cdot P_0\right) \cdot i + \frac{1}{n} \cdot P_0$;
- Płatność na koniec n-tego miesiąca: $\left(P_0 - (n-1) \cdot \frac{1}{n} \cdot P_0\right) \cdot i + \frac{1}{n} \cdot P_0$.

Należy więc obliczyć wartość przyszłą wartość powyższych strumieni dokonywanych płatności. Biorąc k-ty z kolej strumień, jego wartość przyszła jest następująca:

$$\left(\left(P_0-(k-1)\cdot\frac{1}{n}\cdot P_0\right)\cdot i+\frac{1}{n}\cdot P_0\right)\cdot(1+i)^{n-k}$$

Sumując przyszłe wartości poszczególnych strumieni otrzymamy:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left(P_0-(k-1)\cdot\frac{1}{n}\cdot P_0\right)\cdot i+\frac{1}{n}\cdot P_0\right)\cdot(1+i)^{n-k}=P_0\cdot(1+i)^n \tag{2.22}$$

Porównując powyższą zależność (2.22) z wartością przyszłą strumieni płatności związanych z kredytem zaciągniętym w pierwszym banku (2.21) stwierdzamy, że koszt kredytów w obu bankach jest jednakowy.

■

6. Wartość bieżąca pieniądza

Wartość bieżąca (Present Value- PV) określa, jaka jest obecna wartość pieniądza, którego otrzymanie jest oczekiwane w przyszłości.

Załóżmy, że za 5 lat oczekujemy kwoty 1000 zł. Jaki kapitał należy obecnie zainwestować przy rocznej stopie 15 %, aby otrzymać oczekiwaną kwotę.
Żeby rozwiązać powyższy problem skorzystamy z zależności (2.18), gdzie i=0,15; P_n=1000 zł; n=5. Szukaną wielkością jest P_0.
Przekształcamy wzór (2.18) w następujący sposób:

$$P_n=P_0\cdot(1+i)^n \quad\Rightarrow\quad P_0=\frac{P_n}{(1+i)^n}=\frac{P_n}{q^n} \tag{2.23}$$

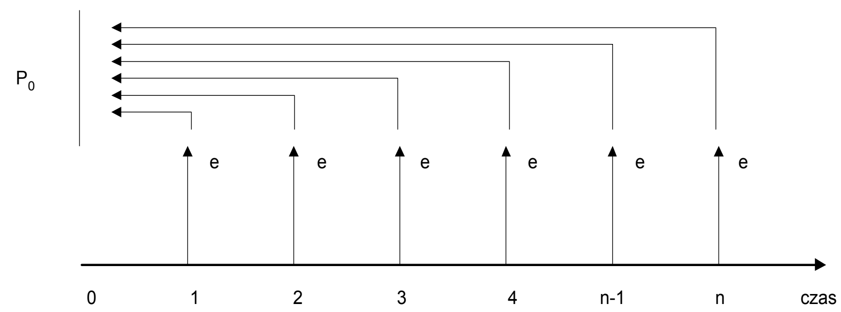
gdzie $\frac{1}{(1+i)^n}$ jest tak zwanym **czynnikiem dyskontującym**.

W naszym przykładzie otrzymamy:

$$P_0=\frac{1000}{(1+0{,}15)^5}\cong 497.18$$

Załóżmy obecnie, że przez n kolejnych lat pod koniec każdego roku pojawiają się wartości e każda.
Ich wartość bieżącą oznaczaną przez P_0 obliczymy ze wzoru:

$$P_0=e\frac{1-q^n}{q^n\cdot(1-q)} \tag{2.24}$$



Rysunek Istota wartości bieżącej

Przykład 2.7

Lokujemy 1000 zł w banku według stopy procentowej 15 %. Załóżmy, że na koniec każdego roku płacone są nam odsetki od ulokowanego kapitału, zaś po 3 latach bank wypłaca nam również ulokowaną kwotę. Obliczyć wartość bieżącą wszystkich wpływów w przyszłości wykorzystując do dyskontowania wartość 10 %.

<u>*Rozwiązanie*</u>

i=0,1
e_1=e_2=0,15·1000=150
e_3=0,15·1000+1000=1150.

Obliczamy wartość bieżącą każdego z przyszłych wpływów:

Mianowicie:
- Wartość bieżąca pierwszego wpływu:

$$\frac{0{,}15 \cdot 1000}{(1+0{,}1)} \cong 136.36$$

Elementy matematyki finansowej

- Wartość bieżąca drugiego wpływu:

$$\frac{0{,}15 \cdot 1000}{(1+0{,}1)^2} \cong 123.97$$

- Wartość bieżąca trzeciego wpływu:

$$\frac{0{,}15 \cdot 1000 + 1000}{(1+0{,}1)^3} \cong 864.01$$

co daje nam następującą wartość bieżącą P_0 wszystkich wpływów, czyli:

$$P_0 = 136.36 + 123.97 + 864.01 = 1124.34$$

■

W wielu przypadkach mamy jednak do czynienia z szeregami płatności o jednakowej wysokości, dokonywanych regularnie przez nieskończoną liczbę okresów.

Tego typu szereg w terminologii finansów określany bywa mianem **perpetuity** lub **rentą wieczystą**.

Wyróżnia się:
- **Perpetuity zwykłe** (płatności następują na koniec każdego okresu);
- **Perpetuity płatne z góry** (płatności następują na początku każdego okresu).

Wartość bieżąca zwykłego perpetuity wylicza się z następującej zależności:

$$P_0 = \frac{e}{(1+i)} + \frac{e}{(1+i)^2} + \ldots = \frac{e}{i} \tag{2.25}$$

Wartość bieżącą perpetiuty płatnego z góry wylicza się ze wzoru:

$$P_0 = e + \frac{e}{(1+i)} + \frac{e}{(1+i)^2} + \ldots = e + \frac{e}{i} \tag{2.26}$$

7. Stopa procentowa a inflacja

Rozważmy przypadek złożenia 1000 zł depozytu w banku na 10 %. Oznacza to, że po roku otrzymamy 1100 zł.
Oprocentowanie 10 % jest traktowane jako wynagrodzenie za powstrzymanie się przez rok od konsumpcji, co wiąże się z tym, że po roku będzie można kupić o 10 % więcej produktów.

Jeżeli więc cena 1 kg mięsa wynosi 10 zł, to w chwili obecnej będziemy mogli kupić 100 kg, zaś po roku – 110 kg.

Jeśli jednak okaże się, że cena mięsa w ciągu roku wzrośnie o 5 % do 10.5 zł, to za rok czyli za kwotę 1100 zł będziemy mogli nabyć 104.8 kg a więc tylko o 4.8 % więcej w stosunku do chwili obecnej.

Oznacza to, że nasza nagroda za wstrzymanie się przez rok od konsumpcji wynosi 4.8 % a nie 10 %.

W przypadku występowania inflacji, nagroda za cierpliwość określana jest przez tak zwaną **realną stopę procentową**.

Ogólna formuła określająca relacje pomiędzy realną r_{real} a nominalną r_{nom} stopą procentową w warunkach inflacji na poziomie r_{inf} ma następującą postać:

$$1 + r_{real} = \frac{1 + r_{nom}}{1 + r_{\inf}} \Rightarrow r_{real} = \frac{1 + r_{nom}}{1 + r_{\inf}} - 1 \tag{2.27}$$

W praktyce, bardzo często wykorzystuje się przybliżoną formułę na obliczanie wartości realnej stopy procentowej:

$$r_{real} = r_{nom} - r_{\inf} \tag{2.28}$$