PRZEDMIOT : ***EFEKTYWNOŚĆ SYSTEMÓW INFORMATYCZNYCH***

Temat:

Ryzyko inwestycji

PROWADZĄCY :

dr inż. Zbigniew TARAPATA

Zbigniew.Tarapata@isi.wat.edu.pl

http://tarapata.strefa.pl

Hasło do materiałów na stronie WWW podaje wykładowca !

3. Ryzyko a dochód

3.1 Istota, definicje i rodzaje ryzyka

Elementem towarzyszącym każdej decyzji, w tym i decyzji inwestycyjnej, jest **ryzyko**. Wynika to z faktu, że decyzje opierają się na prognozie co do przyszłych warunków działania, a nie na informacjach pewnych.

Ryzyko jest to niebezpieczeństwo niezrealizowania celu, założonego przy podejmowaniu określonej decyzji.

- W działalności gospodarczej nieosiągnięcie celu może się wyrażać nie tylko wystąpieniem straty lecz również niższym, niż założony, wynikiem;
- W przypadku procesu inwestycyjnego wiąże się to z niebezpieczeństwem błędnej lokaty kapitału;
- Owo niebezpieczeństwo ma najczęściej charakter mierzalny w kategoriach probabilistycznych. Możliwe jest więc określenie np. prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzeń, warunkujących dzisiejszą decyzję;
- Ta cecha odróżnia ryzyko od niepewności, która jest niemierzalna.

Wspomniane wcześniej **ryzyko inwestycyjne** dzieli się na dwa rodzaje:

- ryzyko sukcesu : niebezpieczeństwo osiągnięcia efektywności niezgodnej z założeniami projektowymi.
- ryzyko płynności : ściśle związane z ryzykiem sukcesu. Polega na braku lub opóźnieniu wpływów z inwestycji.

<u>*Przykład 3.1.1*</u>

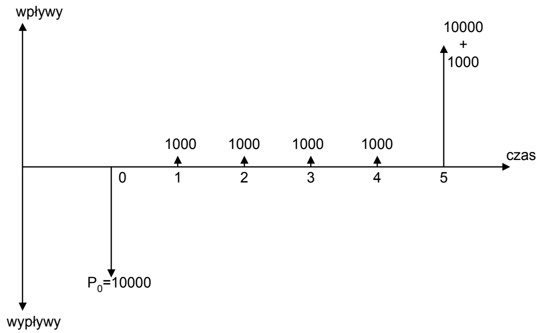
Załóżmy, że dysponujemy 5-cio letnią obligacją o wartości nominalnej 10000 zł z odsetkami płaconymi corocznie w wysokości 10%. Diagram przepływów gotówkowych dla tej obligacji przedstawia Rys. 3.1.1.

Zakładając stopy rynkowe na poziomie 10% cenę obligacji P_0 liczymy jak zaktualizowaną wartość wszystkich wpływów gotówkowych, czyli:

$$P_0 = \sum_{i=1}^{5} \frac{1000}{(1+0.1)^i} + \frac{10000}{(1+0.1)^5} = 10000$$

W przypadku, gdy stopy procentowe zmniejszą się do poziomu 8% wartość P_0 wyniesie:

$$P_0 = \sum_{i=1}^{5} \frac{1000}{(1+0.08)^i} + \frac{10000}{(1+0.08)^5} = 10798.5$$



Rys. 3.1.1 Diagram przepływów gotówkowych obligacji 5-cio letniej o wartości nominalnej 10000 zł, o odsetkach corocznych w wysokości 10%.

zaś gdy stopy procentowe wzrosną do 12% P_0 wyniesie:

$$P_0 = \sum_{i=1}^{5} \frac{1000}{(1+0.12)^i} + \frac{10000}{(1+0.12)^5} = 9279.1$$

Widać więc na powyższym przykładzie odwrotną zależność ceny obligacji i rynkowych stóp procentowych. Zmiana stóp procentowych powoduje zmiany ceny obligacji (instrumentu o stałej stopie procentowej), czego wynikiem jest występowanie zdefiniowanego wcześniej ryzyka inwestycyjnego.

Ważną **cechą ryzyka (i niepewności) jest ich dynamiczny i ekonomiczny charakter**. Wyraża się to w następujących faktach:

- niepewność i ryzyko wzrastają wraz z wydłużeniem horyzontu czasowego inwestycji, czyli wraz ze wzrostem czasu zaangażowania kapitału;
- inwestor podejmujący decyzję inwestycyjną związaną z większym ryzykiem, może więcej zyskać lub więcej stracić niż w przypadku decyzji o niższym ryzyku;
- ryzyko ma swoją cenę, która zależy od rodzajów ryzyka i metod jej ustalania; z uwagi na tę cenę mówimy o inwestycjach mniej lub bardziej bezpiecznych, czyli o mniejszym lub większym ryzyku.

Z punktu widzenia inwestora można rozpatrywać trzy rodzaje zachowań wobec ryzyka :

- preferowanie ryzyka i jego skutków;
- neutralność wobec ryzyka;
- niechęć (awersja) do ryzyka i jego pomiaru.

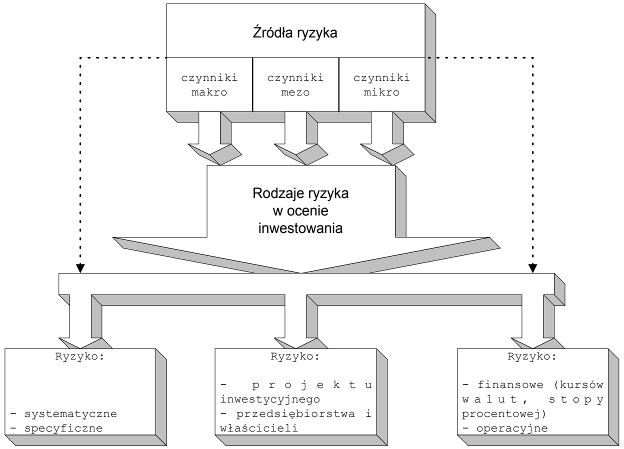
Źródłem ryzyka decyzji inwestycyjnych podejmowanych na podstawie wyniku rachunku są trzy grupy czynników (Rys. 3.1.2):

- makrogospodarcze (stan gospodarki, inflacja, polityka monetarna itp.);
- mezogospodarcze (związane z analizą sektorową, np. stopień innowacyjności sektora, jego energochłonność, mobilność itp.);
- mikrogospodarcze (związane z analizą sytuacyjno-finansową przedsiębiorstwa).

<u>Rodzaje ryzyka:</u>

Ryzyko systematyczne jest wywołane ogólnymi warunkami gospodarowania (rynkowymi, społecznymi, politycznymi, prawnymi) i dotyczy wszystkich rozpatrywanych projektów, przy czym poszczególne projekty mogą wykazywać różną wrażliwość na czynniki tego ryzyka.

Ryzyko specyficzne dotyczy konkretnych projektów, a nawet ich wariantów, tzn. może być charakterystyczne tylko dla danego wariantu i może nie mieć żadnego znaczenia dla innego wariantu przy rozpatrywaniu tego samego projektu inwestycyjnego.



Rys. 3.1.12 Źródła i rodzaje ryzyka w ocenie projektu inwestycyjnego

Ze względu na **kryterium skutków decyzji inwestycyjnej** w globalnej strategii przedsiębiorstwa możemy wyodrębnić:
a) ryzyko projektu inwestycyjnego;
b) ryzyko przedsiębiorstwa i jego właściciela.

Ryzyko projektu inwestycyjnego wynika ze skali trafności założeń technicznych i ekonomiczno-finansowych tego projektu. Większe ryzyko towarzyszy realizacji inwestycji nowych, a mniejsze – inwestycji modernizacyjnych.

Ryzyko przedsiębiorstwa i jego właściciela zazwyczaj nie jest takie samo jak ryzyko inwestycji. **Ryzyko przedsiębiorstwa** zależy od relacji między korzyściami osiągniętymi z realizacji danego projektu inwestycyjnego, a korzyściami związanymi z eksploatowaniem majątku będącego w dyspozycji tego przedsiębiorstwa. **Ryzyko właściciela kapitału** jest związane z ryzykiem systematycznym i ich skłonnością oraz preferencjami do lokaty kapitału w różnych firmach.

Ze względu na kryterium efektywnego doboru projektu inwestycyjnego wyróżnia się ryzyko:
a) finansowe;
b) operacyjne.

Ryzyko finansowe rozpatruje się najczęściej w kontekście ryzyka kursowego oraz ryzyka stopy procentowej.

Ryzyko kursowe (*foreign exchange risk*) jest to ryzyko przeniesienia straty z tytułu posiadania np. przez bank otwartej, nie zabezpieczonej pozycji walutowej na skutek niekorzystnego ruchu kursów walutowych.

Ryzyko stopy procentowej (*interest rate risk*) to możliwy wpływ zmian stóp procentowych na dochody i wartość netto jednostki. Ryzyko stopy procentowej pojawia się, kiedy kapitał podstawowy i odsetkowe przepływy pieniężne, zarówno bilansowe, jak i pozabilansowe, mają różniące się terminy wyceny. Wielkość ryzyka stanowi funkcję wielkości i kierunku zmian stopy procentowej oraz wielkości i terminów zapadalności niedopasowanych pozycji.

Ryzyko operacyjne związane jest ze zmianami w strukturze aktywów, tzn. ze zmianami elementów majątku trwałego i obrotowego. Ryzyko to wynika ze stopnia wpływu zmian sprzedaży na kształtowanie się zysku operacyjnego. Wpływa więc na niepewność przyszłych zmian cen surowców i wyrobów końcowych, zmian technologii produkcji, konkurencji, aktywności marketingowej i preferencji konsumenta itp.

3.2 Zarządzanie ryzykiem finansowym

W krajach wysoko rozwiniętych dla celów analizy, ograniczania i zabezpieczania się przed ryzykiem, rozwinęła się dyscyplina „*risk management*" służąca zarządzaniu ryzykiem.
Zarządzanie ryzykiem finansowym w instytucji polega na projektowaniu i wdrażaniu struktury czasowej przepływów pieniężnych w celu osiągnięcia pożądanego poziomu ryzyka.

Metody zarządzania ryzykiem:

1. metody korygowania efektywności projektu inwestycyjnego - polegają one na korektach wybranych parametrów rachunku efektywności inwestycji i tzw. narzutach procentowych;
2. analiza wrażliwości i progu rentowności - polega na zmianach różnych rodzajów nakładów i efektów będących elementami rachunku oraz na wyznaczaniu dla przedsiębiorstwa wartości krytycznych związanych z realizacją danej inwestycji. Narzędzie, które służą do tych analiz to: próg rentowności, okres zwrotu zaangażowanego kapitału, margines bezpieczeństwa. Wynikiem metody jest ocena wartości krytycznych wariantów inwestycji;
3. metody probabilistyczno-statystyczne - szacowanie i pomiar ryzyka metodami rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Chodzi przede wszystkim o szacowanie oczekiwanej wartości zdyskontowanej netto (NPV);
4. metody operacyjne (w tym teoria gier) - stosuje się w warunkach niepewności wcześniej zdefiniowanej.

Instytucją regulującą i nadzorującą zarządzanie ryzykiem finansowym jest Bazylejski Komitet ds. Nadzoru Bankowego (*Basle Committee on Banking Supervision*). W skład tego organu wchodzą przedstawiciele banków centralnych i instytucji nadzorujących system bankowy z dwunastu krajów świata. Najważniejszym dokumentem Komitetu Bazylejskiego była tzw. Bazylejska Ugoda Kapitałowa (*Basle Capital Acoord*) z 1988 roku, której autorzy skoncentrowali się na ryzyku kredytowym. W roku 1996 opublikowana została najważniejsza poprawka tej ugody, uwzględniająca ryzyko rynkowe. W 1999 roku środowisko finansowe otrzymało do konsultacji dwa dokumenty: pierwszy dotyczył modelowania ryzyka kredytowego, zaś drugi jest propozycją dokumentu mającego zastąpić starą ugodę bazylejską.

3.3 Miary ryzyka rynkowego

Kluczowym elementem procesu zarządzania ryzykiem, jest pomiar owego ryzyka.
Służą temu tzw. miary ryzyka rynkowego, klasyfikowane w trzech kategoriach :

- **miary zmienności** (*volatility measures*);
- **miary wrażliwości** (*sensitivity measures*);
- **miary zagrożenia** (*downside risk measures*).

Miary zmienności odzwierciedlają zmiany finansowych cen lub stóp zwrotu. Z reguły bierze się pod uwagę rozkład cen (lub stóp zwrotu) i wyznacza miary rozproszenia tego rozkładu.

Miary wrażliwości odzwierciedlają wpływ pewnych zmiennych, zwanych czynnikami ryzyka na ceny (lub stopy zwrotu).

Miary zagrożenia odnoszą się do pomiaru możliwych niekorzystnych odchyleń od oczekiwanych wartości (cen lub stóp zwrotu).

3.3.1 Wprowadzenie

Definicja podstawowych pojęć: stopy zwrotu, oczekiwanej stopy zwrotu oraz rozkładu stopy zwrotu.
Stopa zwrotu określa dochód przypadający na jednostkę zainwestowanego kapitału i wyraża się wzorem:

(3.3.1)
$$R_t = \frac{(W_t - W_{t-1}) + D_t}{W_{t-1}}$$

gdzie:

R_t – stopa zwrotu akcji osiągnięta w t-tym okresie;
W_t – wartość (cena) akcji w t-tym okresie;
D_t – dywidenda wypłacona w t-tym okresie.

Przy stopach zwrotu, do opisu niepewności stosuje się podejście wynikające z rachunku prawdopodobieństwa. W podejściu tym rozważa się tzw. **rozkład stopy zwrotu**. Upraszczając, rozkład stopy zwrotu są to możliwe do osiągnięcia stopy zwrotu oraz prawdopodobieństwa ich osiągnięcia.

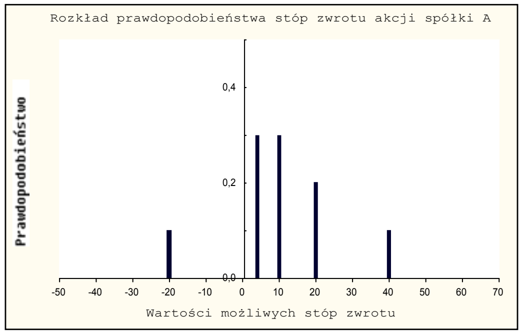
<u>*Przykład 3.3.1*</u>

Rozważany jest zakup akcji spółki A. Eksperci określili pięć możliwych scenariuszy stanu gospodarki w przyszłości, a zatem 5 możliwych stanów rynku. Oszacowali również stopy zwrotu akcji spółki A w każdym z możliwych scenariuszy oraz prawdopodobieństwa zrealizowania każdego scenariusza. Wyniki zawiera tabela.

Tabela 3.3.1 Dane do Przykładu 3.3.1

Możliwy stan i	Prawdopodobieństwo p_i	Stopa zwrotu R_i (w %)
1	0.1	40
2	0.2	20
3	0.3	10
4	0.3	4
5	0.1	-20

Interpretację graficzną danych zawartych w Tabeli 3.3.1 przedstawia Wykres 3.3.1.



Wykres 3.3.1 Wykres rozkładu stopy zwrotu zawartego w Tabeli 3.3.1

Syntetyczną miarą dochodu, którą wyznacza się na podstawie rozkładu stopy zwrotu jest tzw. **oczekiwana stopa zwrotu** (*expected return*):

(3.3.3) $$R = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot R_i$$

gdzie:

R – oczekiwana stopa zwrotu;

R_i – i-ta możliwa wartość stopy zwrotu;

p_i – prawdopodobieństwo osiągnięcia przez stopę zwrotu i-tej wartości;

m – liczba możliwych do osiągnięcia wartości stopy zwrotu.

<u>*Przykład 3.3.2*</u>

Weźmy pod uwagę akcje spółki A, której rozkład stopy zwrotu został przedstawiony w Tabeli 3.3.1. Wyznaczyć oczekiwaną stopę zwrotu z akcji spółki A.

Po podstawieniu do wzoru (3.3.3) wartości z Tabeli 3.3.1 otrzymamy:

$$R = 0.1 \cdot 40\% + 0.2 \cdot 20\% + 0.3 \cdot 10\% + 0.3 \cdot 4\% + 0.1 \cdot (-20\%) = 10.2\%$$

■

Gdy nie ma możliwości uzyskania informacji o rozkładzie stopy zwrotu, do oszacowania wartości oczekiwanej stopy zwrotu można wykorzystać dane historyczne tzn. stopy zwrotu zrealizowane w przeszłości. Na tej podstawie szacuje się oczekiwaną stopę zwrotu według wzoru:

(3.3.4) $$R = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} R_t$$

gdzie:

R_t – stopa zwrotu z akcji zrealizowana w t-tym okresie;

n – liczba okresów, z których pochodzą dane.

3.3.2 *Miary zmienności ryzyka*

Ryzyko jest tu rozumiane jako niezgodność z oczekiwanym dochodem i pod uwagę bierze się rozkłady **stopy zwrotu** (*rate of return*) zwanej również **stopą zysku**. Aby lepiej zrozumieć sens definiowania miar zmienności ryzyka posłużmy się następującym przykładem.

Przykład 3.3.3

Rozważmy akcje dwóch spółek A i B. W Tabeli 3.3.2 przedstawiono rozkłady stóp zwrotu tych akcji.

Tabela 3.3.2 Dane do przykładu 3.3.3

Możliwy stan	Prawdopodobieństwo	Stopa zwrotu	
i	p_i	R_{iA} (w %)	R_{iB} (w %)
1	0.1	60	20
2	0.2	30	14
3	0.4	10	10
4	0.2	-10	6
5	0.1	-40	0

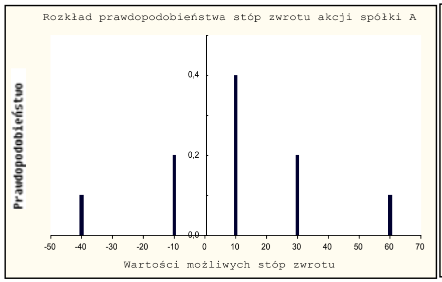
Przedstawmy również te dane (rozkłady) w postaci graficznej na Wykresie 3.3.2.

Po policzeniu oczekiwanej wartości stopy zwrotu dla obu spółek (ze wzoru (3.3.3)) otrzymamy:

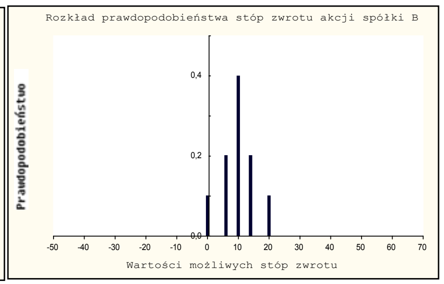
R_A=10% R_B=10%

czyli z punktu widzenia oczekiwanej wartości stopy zwrotu zainwestowanie w obie spółki jest tak samo atrakcyjne (ten sam oczekiwany „zysk”).

a)



b)



Przedstawiony przykład sugeruje, że ryzyko akcji można określać za pomocą „rozrzutu” możliwych stóp zwrotu wokół oczekiwanej stopy zwrotu.

Miarą ryzyka akcji, która wykorzystuje tę zasadę jest **wariancja stopy zwrotu** akcji (*variance of returns*):

(3.3.5) $$V = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot (R_i - R)^2$$

gdzie:

V – wariancja stopy zwrotu;

R – oczekiwana stopa zwrotu.

Częściej stosuje się inną miarę ryzyka, mianowicie **odchylenie standardowe stopy zwrotu** (*standard deviation of returns*):

(3.3.6) $$s = \sqrt{V} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot (R_i - R)^2}$$

gdzie:

s – odchylenie standardowe stopy zwrotu.

Odchylenie standardowe wskazuje przeciętne odchylenie możliwych stóp zwrotu od oczekiwanej stopy zwrotu, przy czym im większe jest odchylenie standardowe stopy zwrotu, tym większe ryzyko i na odwrót.

Przykład 3.3.4

Rozważmy te same akcje, co w poprzednim przykładzie (Tabela 3.3.2). Oczekiwana stopa zwrotu akcji obu spółek wynosi: R_A=10%, R_B=10%.

Obliczyć wariancję oraz odchylenie standardowe stóp zwrotu akcji obu spółek.

Ze wzoru (3.3.5) oraz Tabeli 3.3.2 mamy:

- dla akcji spółki A

$$V_A = 0.1\cdot(0.6-0.1)^2 + 0.2\cdot(0.3-0.1)^2 + 0.4\cdot(0.1-0.1)^2 +$$
$$0.2\cdot(-0.1-0.1)^2 + 0.1\cdot(-0.4-0.1)^2 = 0.066$$

- dla akcji spółki B

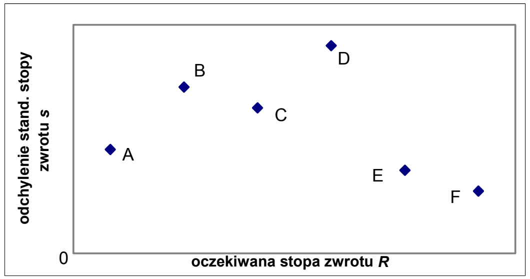
$$V_B = 0.1\cdot(0.2-0.1)^2 + 0.2\cdot(0.14-0.1)^2 + 0.4\cdot(0.1-0.1)^2 +$$
$$0.2\cdot(0.06-0.1)^2 + 0.1\cdot(0-0.1)^2 = 0.00264$$

oraz ze wzoru (3.3.6):

$$s_A = \sqrt{V_A} = \sqrt{0.066} = 0.257 = 25.7\%$$
$$s_B = \sqrt{V_B} = \sqrt{0.00264} = 0.051 = 5.1\%$$

■

Powyższe obliczenia potwierdzają fakt zaobserwowany na Wykresie 3.3.2, że akcje spółki B cechują się mniejszym ryzykiem, bo $s_B < s_A$. Graficzną zależność między dochodem a ryzykiem z akcji przedstawia Rys. 3.3.1.



Rys. 3.3.1 Graficzna zależność między oczekiwaną stopą zwrotu i odchyleniem standardowym stopy zwrotu

Przypadek spółki F, jakkolwiek bardzo atrakcyjny dla inwestora (posiada najmniejsze ryzyko spośród wszystkich pozostałych spółek i jednocześnie najwyższą oczekiwaną stopę zwrotu), rzadko występuje w praktyce.

Zauważmy, że przy mierzeniu odchylenia standardowego stopy zwrotu (wzór (3.3.6)), odchylenia możliwych stóp zwrotu od oczekiwanej stopy zwrotu podnosi się do kwadratu. Powoduje to, że jednorazowe duże odchylenie podniesione do kwadratu może zawyżyć wielkość ryzyka. Wady tej pozbawione jest **odchylenie przeciętne stopy zwrotu** (*mean absolute deviation of returns*):

(3.3.7) $$d = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot |R_i - R|$$

gdzie:

d – odchylenie przeciętne stopy zwrotu;
$|x|$ - wartość bezwzględna z x;

Przykład 3.3.5

Rozważmy akcje tych samych dwóch spółek co w przykładzie poprzednim
(Tabela 3.3.2). Wyznaczyć odchylenie przeciętne stóp zwrotu akcji spółki A i B.

Ze wzoru (3.3.7) oraz Tabeli 3.3.2 mamy:

- dla akcji spółki A

$$d_A = 0.1\cdot|0.6-0.1| + 0.2\cdot|0.3-0.1| + 0.4\cdot|0.1-0.1| +$$
$$0.2\cdot|-0.1-0.1| + 0.1\cdot|-0.4-0.1| = 0.18$$

- dla akcji spółki B

$$d_B = 0.1\cdot|0.2-0.1| + 0.2\cdot|0.14-0.1| + 0.4\cdot|0.1-0.1| +$$
$$0.2\cdot|0.06-0.1| + 0.1\cdot|0-0.1| = 0.036$$

■

Przedstawione do tej pory miary zmienności ryzyka można nazwać **miarami ryzyka bezwzględnego**. Jak wcześniej wspomnieliśmy, w przypadku większości akcji wyższe ryzyko wiąże się z większym dochodem. W celu powiązania ryzyka z dochodem wyznacza się **miary ryzyka względnego**, które określają wielkość ponoszonego ryzyka w stosunku do osiągniętego dochodu.
Miarą ryzyka względnego jest tzw. **współczynnik zmienności stopy zwrotu** (*coefficient of variation*):

(3.3.13) $$CV = \frac{s}{R}$$

gdzie:

CV – współczynnik zmienności stopy zwrotu;
s – odchylenie standardowe stopy zwrotu (3.3.6);
R – oczekiwana stopa zwrotu (3.3.3).

Współczynnik ten interpretuje się jako wielkość ryzyka przypadająca na jednostkę stopy zwrotu. Inwestor będzie dążył do zakupu akcji o niskiej wartości współczynnika zmienności.

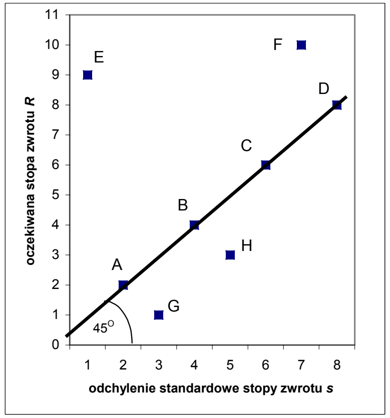
Przykład 3.3.7

Dla danych jak w Tabeli 3.3.2 określić wartości współczynników zmienności stopy zwrotu dla akcji spółki A i B.

Mamy:

R_A=10%, s_A=25.7% → CV_A=2.57
R_B=10%, s_B=5.1% → CV_B=0.51

■



Wykres 3.3.3 Wykres zależności dochód (R) - ryzyko (s)

Na Wykresie 3.3.3 przedstawiono zależność dochód (R) - ryzyko (s).
Zauważmy, że akcje A, B, C, D leżą na prostej o równaniu $s=R$, więc mają taką samą wartość współczynnika zmienności. Minimalizacja wartości współczynnika zmienności wiązać się będzie z maksymalizacją kąta nachylenia prostej przechodzącej przez środek układu współrzędnych i dany punkt (akcję). W tym ujęciu najlepszymi akcjami są E, a następnie F.
Współczynnik zmienności wiąże się jednak z pewnymi niedogodnościami. Jeżeli bowiem będziemy mieli akcję o oczekiwanej stopie zwrotu równej 1% i odchyleniu standardowym 0.01% (czyli CV_1=0.01/1=0.01), to jest ona lepsza od akcji o oczekiwanej stopie zwrotu 100% i odchyleniu standardowym 2% (bo CV_2=2/100=0.02 > CV_1=0.01), co jest stwierdzeniem co najmniej dyskusyjnym !

3.3.3 Miary wrażliwości ryzyka

Miary zmienności ryzyka stanowiły pierwszą grupę miar ryzyka rynkowego. Drugą grupę stanowią **miary wrażliwości** (*sensitivity measures*).
Miary wrażliwości odzwierciedlają wpływ pewnych zmiennych (zwanych czynnikami ryzyka) na ceny (bądź stopy zwrotu). Im bardziej jest wrażliwa cena instrumentu finansowego na działanie czynników wpływających na tę cenę, tym większe jest ryzyko rynkowe instrumentu finansowego. Podobnie, im bardziej jest wrażliwa stopa zwrotu na działanie czynników na nią wpływających, tym większe jest ryzyko rynkowe.
Podstawowa różnica jaka występuje między miarami zmienności a wrażliwości ryzyka polega na tym, że miary zmienności mierzą jedynie skutki występowania ryzyka rynkowego (objawiające się zmiennością np. stóp zwrotu), a miary wrażliwości sięgają do przyczyn tych zmian (np. czynników ryzyka).

Miary wrażliwości mają u podstaw jeden z czterech modeli:
- w odniesieniu do wrażliwości ceny:

(3.3.14) $P = g(X_1, X_2, ..., X_m)$
lub
(3.3.15) $P = g(X_1, X_2, ..., X_m, \varepsilon)$

- w odniesieniu do wrażliwości stopy zwrotu:

(3.3.16) $R = g(X_1, X_2, ..., X_m)$
lub
(3.3.17) $R = g(X_1, X_2, ..., X_m, \varepsilon)$
gdzie:
P - cena instrumentu finansowego;
R - stopa zwrotu instrumentu finansowego;
X_i - i-ty czynnik determinujący cenę bądź stopę zwrotu instrumentu finansowego, $i = \overline{1, m}$;
g - funkcja;
ε - składnik losowy.

Miara wrażliwości zdefiniowana jest jako pochodna cząstkowa funkcji g względem jednego z czynników ryzyka, tzn.:
- w odniesieniu do modeli (3.3.14) i (3.3.15):

(3.3.18) $$\frac{\partial P}{\partial X_i}$$

- w odniesieniu do modeli (3.3.16) i (3.3.17):

(3.3.19) $$\frac{\partial R}{\partial X_i}$$

Oznacza to, że można wyznaczyć tyle miar wrażliwości, ile jest czynników ryzyka, czyli m.

Jednowskaźnikowy model Sharpe'a rynku kapitałowego (upraszczający tzw. klasyczną teorię portfela).
Model ten opiera się na założeniu, że kształtowanie się stóp zwrotu akcji jest zdeterminowane działaniem czynnika odzwierciedlającego zmiany na rynku kapitałowym. Ma on postać:

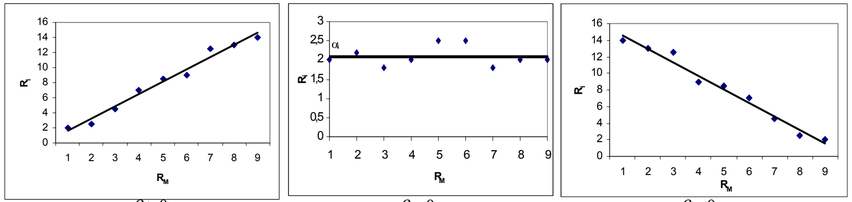
(3.3.20) $R_i = \alpha_i + \beta_i \cdot R_M + e_i$
gdzie:
R_i - stopa zwrotu i-tej akcji;
R_M - stopa zwrotu indeksu rynku;
α_i, β_i - współczynniki równania;
e_i - składnik losowy.

Wzór (3.3.20) jest równaniem regresji i przedstawia liniową zależność stopy zwrotu akcji od stopy zwrotu indeksu rynku. Działanie "innych" czynników rynku obrazuje e_i. W praktyce równanie regresji jest szacowane i w rezultacie otrzymuje się przybliżony model:

(3.3.21) $R_i = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i \cdot R_M$

gdzie $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$ oznaczają estymatory parametrów α_i, β_i. W dalszych rozważaniach będziemy utożsamiać estymatory parametrów z nimi samymi (choć nie jest to do końca poprawne formalnie), tzn. będziemy przyjmować, że $\hat{\alpha}_i = \alpha_i$, $\hat{\beta}_i = \beta_i$.

Równanie (3.3.21) nosi nazwę **linii charakterystycznej akcji** (linii charakterystycznej papieru wartościowego) (*security characteristic line*). W równaniu tym podstawową rolę odgrywa **współczynnik beta** $\boldsymbol{\beta}$ (*beta coefficient*). Wskazuje on, o ile procent w przybliżeniu wzrośnie stopa zwrotu akcji, gdy stopa zwrotu indeksu rynku (portfela rynkowego) wzrośnie o 1%. Jest to jedna z najważniejszych miar wrażliwości ryzyka.
Interpretację współczynnika β_i przedstawiono na Wykresie 3.3.4.



$\beta_i>0$ $\beta_i=0$ $\beta_i<0$

Wykres 3.3.4 Interpretacja współczynnika beta (β)

Wartość współczynnika β_i możemy obliczyć korzystając z ogólnej idei przedstawionej w (3.3.19). Dla modelu regresji liniowej (3.3.21), po oszacowaniu wartości β_i metodą najmniejszych kwadratów, otrzymamy:

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_M)}{V_M} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot (R_{ij} - R_i)\cdot(R_{Mj} - R_M)}{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot (R_{Mj} - R_M)^2} \qquad (3.3.22)$$

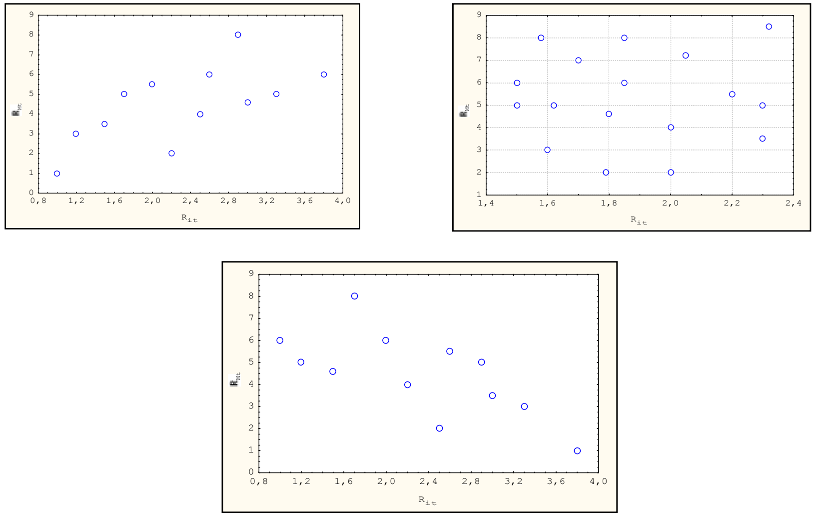
gdzie:
$\operatorname{cov}(R_i, R_M)$ – kowariancja między stopami zwrotu i-tej akcji oraz indeksu rynku;
V_M – wariancja indeksu rynku;
m – liczba możliwych wartości stopy zwrotu;
p_j – prawdopodobieństwo przyjęcia przez stopę zwrotu j-tej wartości;
R_i – oczekiwana stopa zwrotu akcji i;
R_M – oczekiwana stopa zwrotu indeksu rynku.

Bardzo popularnym miernikiem powiązania stóp zwrotu dwóch instrumentów finansowych (w naszym przypadku – i-tej akcji i indeksu rynku) jest **współczynnik korelacji**:

$$\rho_{iM} = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_M)}{s_i \cdot s_M} \qquad (3.3.24)$$

gdzie:
ρ_{iM} - współczynnik korelacji między stopą zwrotu i-tej akcji i indeksu rynku;
s_i – odchylenie standardowe stopy zwrotu i-tej akcji, $s_i = \sqrt{V_i}$;
s_M – odchylenie standardowe stopy zwrotu indeksu rynku, $s_M = \sqrt{V_M}$.

Współczynnik korelacji stóp zwrotu (3.3.24) określa siłę i kierunek powiązania stóp zwrotu tych akcji. Jego wartość zawiera się zawsze w przedziale [-1, 1].
Interpretację współczynnika korelacji przedstawiono na Rys. 3.3.2.



Rys.3.3.2 Interpretacja współczynnika korelacji

Zauważmy, że wartość współczynnika beta może być liczona z wykorzystaniem współczynnika korelacji. Mianowicie z (3.3.22) i (3.3.24) wynika, że

(3.3.25) $$\beta_i = \frac{\rho_{iM} \cdot s_i \cdot s_M}{V_M} = \frac{\rho_{iM} \cdot s_i \cdot s_M}{s_M^2} = \frac{\rho_{iM} \cdot s_i}{s_M}$$

Przykład 3.3.8

Rozważmy dane z Tabeli 3.3.2. Niech stopy zwrotu dotyczące spółki B odnoszą się do indeksu rynku, tzn. $R_{Mj} = R_{Bj}, j = \overline{1,5}$.

Wyliczyć wartość współczynnika zmienności β_A, będącego miarą wrażliwości ryzyka zainwestowania w akcje spółki A w zależności od zachowania się stóp zwrotu indeksu rynku.

Ponieważ znamy rozkład stóp zwrotu akcji A oraz indeksu rynku (dane jak dla akcji spółki B), więc aby wyliczyć β_A korzystamy wprost ze wzoru (3.3.22), czyli:

$$\beta_A = \frac{\mathrm{cov}(R_A, R_M)}{V_M}$$

Wariancję oraz wartości oczekiwane stóp zwrotu indeksu rynku oraz akcji spółki A policzyliśmy we wcześniejszych przykładach:

$$V_M = V_B = 0.00264, \qquad R_A = 10\% = 0.1,$$
$$R_B = 10\% = 0.1$$

Aby policzyć kowariancję $\mathrm{cov}(R_A, R_M)$ korzystamy ze wzoru (licznik z (3.3.22)):

$$\mathrm{cov}(R_A, R_M) = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot (R_{Aj} - R_A) \cdot (R_{Mj} - R_M) =$$
$$= 0.1 \cdot (0.6 - 0.1) \cdot (0.2 - 0.1) + 0.2 \cdot (0.3 - 0.1) \cdot (0.14 - 0.1) + 0.4 \cdot (0.1 - 0.1) \cdot (0.1 - 0.1) +$$
$$+ 0.2 \cdot (-0.1 - 0.1) \cdot (0.06 - 0.1) + 0.1 \cdot (-0.4 - 0.1) \cdot (0 - 0.1) = 0.0132$$

Stąd:

$$\beta_A = \frac{0.0132}{0.00264} = 5$$

Z wykonanych wyliczeń wynika, że jeżeli wartość stopy indeksu rynku zmieni się o 1%, to wartość stopy zwrotu akcji A zmieni się o 5%. Widać więc bardzo silną zależność stopy zwrotu akcji spółki A od stopy zwrotu indeksu rynku.

■

Wartość współczynnika $\hat{\alpha}_i$ we wzorze (3.3.21) wyliczamy ze wzoru:

(3.3.26) $$\hat{\alpha}_i = R_i - \hat{\beta}_i \cdot R_M$$

Przykład 3.3.9

Dla danych jak w przykładzie poprzednim oszacujmy wszystkie parametry modelu (3.3.21). Z poprzednich wyliczeń mamy, że:

$R_i = R_A = 10\% = 0.1$;

$R_M = R_B = 10\% = 0.1$;

$\beta_i = \beta_A = 5$

Stąd z (3.3.26) mamy, że

$$\alpha_i = 0.1 - 5 \cdot 0.1 = -0.4 = -40\%$$

czyli pełna postać modelu jest następująca:

$$R_i = -0{,}4 + 5 \cdot R_M$$

■

Współczynnik β wyznacza się nie tylko dla pojedynczych akcji, ale również dla portfeli akcji. **Portfel akcji** jest to zbiór akcji pewnej liczby spółek. Aby wyznaczyć współczynnik beta portfela stosuje się następujący wzór:

(3.3.32) $$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \beta_i$$

gdzie:

β_p - współczynnik beta portfela;

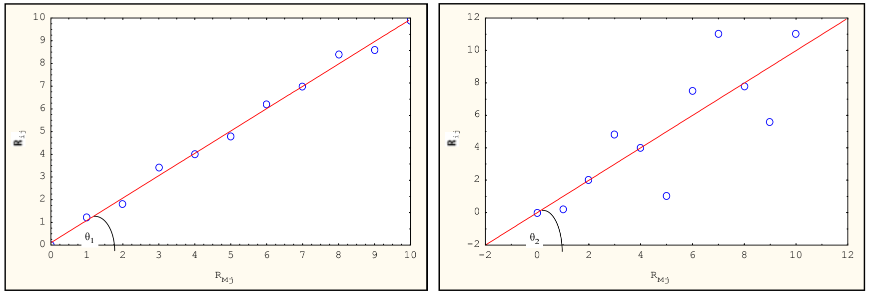
β_i - współczynnik beta *i*-tej akcji;

n - liczba akcji w portfelu;

w_i - udział procentowy *i*-tej akcji w wartości portfela.

Należy zauważyć, że współczynnik β nie zawsze wystarczy do określenia wrażliwości zmiany stopy zwrotu R_i akcji i-tej na zmiany stopy zwrotu R_M indeksu rynku. Dlatego też stosuje się równolegle drugi miernik, tzw. **współczynnik determinacji R^2**, równy:

(3.3.33) $$R^2 = \rho_{iM}^2$$



a) b)

Wykres 3.3.4 Interpretacja współczynnika determinacji: a) $R^2 \approx 1$; b) $R^2 << 1$

Współczynnik ten jest miarą dopasowania punktów empirycznych do prostej. Im wartość tego współczynnika jest bliższa jedności tym punkty empiryczne są lepiej dopasowane („przyklejone") do prostej regresji.

<u>*Przykład 3.3.11*</u>

Rozważmy dane z Tabeli 3.3.2. Niech stopy zwrotu dotyczące spółki B odnoszą się do indeksu rynku, tzn. $R_{Mj} = R_{Bj}, j = \overline{1,5}$.
Wyznaczyć wartość współczynnika determinacji R^2.
Z poprzednich przykładów mamy, że

$$\mathrm{cov}(R_A, R_M) = 0.0132,$$
$$s_M = \sqrt{V_M} = \sqrt{V_B} = \sqrt{0.00264} = 0.051$$
$$s_A = \sqrt{V_A} = \sqrt{0.066} = 0.257$$

Korzystając z (3.3.33) współczynnik R^2 obliczymy następująco:

$$R^2 = \rho_{AM}^2 = \left(\frac{\mathrm{cov}(R_A, R_M)}{s_A \cdot s_M}\right)^2 = \left(\frac{0.0132}{0.257 \cdot 0.051}\right)^2 = 0.999$$

■

Oprócz współczynnika β stosuje się również inne miary wrażliwości ryzyka, jak np.:

- **współczynniki greckie** (delta, gamma, vega, theta, rho) - idea ich wywodzi się z klasycznego modelu wyceny opcji Blacka, Scholesa i Mertona. Współczynniki te wyznaczane są jako pierwsza lub druga pochodna wartości opcji względem czynników wpływających na wartość opcji opisanych w wyżej wspomnianym modelu. Do czynników tych należą: cena wykonania, cena instrumentu podstawowego, stopa wolna od ryzyka oraz zmienność cen instrumentu podstawowego;
- **duration** i **zmodyfikowany duration** - w odniesieniu do obligacji miary te określają wrażliwość ceny obligacji lub innego instrumentu dłużnego na zmiany stopy procentowej;
- **współczynniki wrażliwości (współczynniki beta) modelu wyceny arbitrażowej** - współczynniki te określają jak stopa zwrotu reaguje na zmiany tzw. czynników ryzyka, przy założeniu, że pozostałe czynniki nie zmieniają się. Dotyczy modelu wyceny arbitrażowej APT ;
- **współczynnik zabezpieczenia dla kontraktu terminowego** - stosowany jest w przypadku zabezpieczenia instrumentu podstawowego kontraktem terminowym (w szczególności kontraktem *futures*).

Należy dodać, że zastosowanie miar wrażliwości w zarządzaniu ryzykiem polega na tworzeniu odpowiedniego portfela instrumentów finansowych, w taki sposób, aby miara wrażliwości wyznaczona dla tego portfela wynosiła 0, co oznacza niewrażliwość na tę miarę, a zatem brak ryzyka (z punktu widzenia wartości tej konkretnej miary).

3.3.4 Miary zagrożenia ryzyka

Miary zagrożenia to miary, które różnią się w swej koncepcji od przedstawianych wcześniej miar zmienności i wrażliwości. Wychodzą one z założenia, że do pomiaru ryzyka należy brać pod uwagę przede wszystkim niekorzystne wartości, np. niekorzystne odchylenia od oczekiwanych wartości cen lub stóp zwrotu.
Najpopularniejszą miarą zagrożenia jest obecnie **Value at Risk** (w skrócie **VaR**). Formalnie miarę tę definiuje się następująco:

Value at Risk (VaR) jest to strata wartości rynkowej (np. instrumentu, portfela, instytucji) taka, że prawdopodobieństwo osiągnięcia jej lub przekroczenia w zadanym przedziale czasowym jest równe zadanemu poziomowi tolerancji.

Jeśli np.:
- zadany przedział czasowy wynosi jeden dzień,
- poziom tolerancji wynosi 0.05,
- VaR=100 tys. zł,

to prawdopodobieństwo straty (np. spadku wartości instrumentu, portfela, instytucji) w ciągu jednego dnia równej lub większej niż 100 tys. zł jest równe 0.05 (zdarzenie mało prawdopodobne). Oczywistym jest, że im niższy poziom tolerancji (przy tym samym przedziale czasowym), tym wyższa jest wartość VaR, a im dłuższy jest przedział czasowy (przy tym samym poziomie tolerancji), tym wartość VaR jest również wyższa.
W sposób formalny VaR określone jest za pomocą następującego równania:

(3.3.34) $$P(W < W_0 - VaR) = \alpha$$

gdzie:

α - poziom tolerancji;
W_0 - obecna wartość (cena) instrumentu finansowego;
W - wartość instrumentu finansowego na koniec okresu;

Z (3.3.34) wynika, że VaR jest funkcją kwantyla rozkładu stopy zwrotu. Oznaczmy przez W_α kwantyl rozkładu wartości (ceny) instrumentu finansowego odpowiadający zadanemu poziomowi

tolerancji (prawdopodobieństwu) α. Wówczas z definicji kwantyla otrzymujemy:

(3.3.35) $$P(W < W_\alpha) = \alpha$$

oraz

(3.3.36) $$W_\alpha = W_0 - VaR$$

Oznaczmy kwantyl rozkładu stopy zwrotu odpowiadający zadanemu prawdopodobieństwu α przez R_α. Ponieważ stopa zwrotu odniesiona do kwantyla rozkładu może być wyznaczona następująco:

(3.3.37) $$R_\alpha = \frac{W_\alpha - W_0}{W_0}$$

to dokonując przekształceń wzoru (3.3.37), podstawiając do (3.3.36) otrzymamy:

(3.3.38) $$VaR = -R_\alpha \cdot W_0$$

Ponieważ kwantyl rozkładu stopy zwrotu odpowiadający małemu prawdopodobieństwu α jest z reguły ujemny, zatem VaR we wzorze (3.3.38) jest z reguły wartością dodatnią.
Ze wzoru (3.3.38) wynika, że podstawową charakterystyką niezbędną do określenia VaR jest kwantyl rozkładu stóp zwrotu. Jeżeli założy się, że rozkład stóp zwrotu jest normalny, wówczas kwantyl ten jest funkcją średniej i odchylenia standardowego rozkładu stóp zwrotu, tzn.

(3.3.39) $$R_\alpha = R - u_{1-\alpha} \cdot s$$

gdzie:

R - oczekiwana wartość rozkładu stóp zwrotu;
s - odchylenie standardowe rozkładu stóp zwrotu;
$u_{1-\alpha}$ - kwantyl standardowego rozkładu normalnego rzędu 1-α (wartość odczytywana z tablic standardowego rozkładu normalnego).

Mając (3.3.39) wzór (3.3.38) możemy zapisać inaczej, tzn.:

(3.3.40) $$VaR = -(R - u_{1-\alpha} \cdot s) \cdot W_0$$

Przykład 3.3.12

Wiedząc, że obecne wartości akcji spółki A oraz spółki B wynoszą odpowiednio: W_{0A}=10 zł, W_{0B}=12zł wyznaczyć wartość VaR dla obu spółek, dla poziomu tolerancji α=0.05 oraz dla danych jak w Tabeli 3.3.2. Przyjąć, że rozkłady stóp zwrotu w Tabeli 3.3.2 określono na podstawie danych z jednego miesiąca.

Z poprzednich wyliczeń mamy, że:

R_A=10% R_B=10%

s_A=25.7% s_B=5.1%

Z tablic standardowego rozkładu normalnego odczytujemy, że $u_{0.95}$=1.65. Korzystając z (3.3.40) otrzymujemy:

- dla spółki A:

$$VaR_A = -\left(R_A - u_{0.95}\cdot s_A\right)\cdot W_{0A} = -\left(0.1 - 1.65\cdot 0.257\right)\cdot 10 = 3.24$$

- dla spółki B:

$$VaR_B = -\left(R_B - u_{0.95}\cdot s_B\right)\cdot W_{0B} = -\left(0.1 - 1.65\cdot 0.051\right)\cdot 12 = 0.0081$$

Wracając do interpretacji VaR możemy stwierdzić, że prawdopodobieństwo spadku wartości akcji spółki A w ciągu miesiąca równe lub większe od 3.24 zł jest równe 0.05.

■

Innymi miarami zagrożenia ryzyka są tzw. miary „semi”. Opierają się one na rozumieniu ryzyka jako zjawiska negatywnego, a w związku z tym uwzględniają jedynie ujemne odchylenia od oczekiwanej stopy zwrotu i odnoszą się do poszczególnych miar zmienności.

Semiwariancja stopy zwrotu (*semivariance of return*) jest odpowiednikiem wariancji stopy zwrotu (por. (3.3.5)) i wyznaczana jest według wzoru:

(3.3.41) $$SV = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot d_i^2$$

gdzie:

SV – semiwariancja,

(3.3.42) $$d_i = \begin{cases} R_i - R & , \ gdy \ \ R_i - R < 0 \\ 0 & , \ gdy \ \ R_i - R \geq 0 \end{cases}$$

Semiodchylenie standardowe stopy zwrotu (*standard semideviation of return*) jest odpowiednikiem odchylenia standardowego stopy zwrotu (por. (3.3.6)) i wyznaczane jest według wzoru:

(3.3.43) $$ss = \sqrt{SV} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot d_i^2}$$

Semiodchylenie przeciętne stopy zwrotu jest odpowiednikiem odchylenia przeciętnego stopy zwrotu (por. (3.3.7)) i jest wyznaczane według wzoru:

(3.3.44) $$sd = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot |\, d_i \,|$$

gdzie:

sd – semiodchylenie przeciętne stopy zwrotu;

(3.3.45) $$d_i = \begin{cases} R_i - R & , \ gdy \ \ R_i - R < 0 \\ 0 & , \ gdy \ \ R_i - R \geq 0 \end{cases}$$

Przykład 3.3.13

Rozważmy akcje tych samych dwóch spółek co w przykładzie poprzednim (Tabela 3.3.2). Wyznaczyć semiwariancję, semiodchylenie standardowe oraz semiodchylenie przeciętne stóp zwrotu akcji spółki A i B.

Ze wzoru (3.3.41) oraz Tabeli 3.2 mamy:

- dla akcji spółki A

$$SV_A = 0.2\cdot(-0.1 - 0.1)^2 + 0.1\cdot(-0.4 - 0.1)^2 = 0.033$$

- dla akcji spółki B

$$SV_B = 0.2\cdot(0.06 - 0.1)^2 + 0.1\cdot(0 - 0.1)^2 = 0.00132$$

oraz ze wzoru (3.3.43):

$$ss_A = \sqrt{SV_A} = \sqrt{0.033} = 0.182 = 18.2\%$$

$$ss_B = \sqrt{SV_B} = \sqrt{0.00132} = 0.036 = 3.6\%$$

Ze wzoru (3.3.44) mamy:

$$sd_A = 0.2\cdot|-0.1 - 0.1| + 0.1\cdot|-0.4 - 0.1| = 0.09$$

$$sd_B = 0.2\cdot|\,0.06 - 0.1\,| + 0.1\cdot|\,0 - 0.1\,| = 0.018$$

■

Przedstawimy obecnie dwie inne miary zagrożenia ryzyka. Pierwszą z nich jest **poziom bezpieczeństwa** (*safety level*) inaczej zwany **poziomem ufności** (*confidence level*) określony następująco:

(3.3.46) $$P(R < R_b) = \alpha$$

gdzie:

R_b – poziom bezpieczeństwa, wyrażony w procentach wartości stopy zwrotu;

$P(\cdot)$ – prawdopodobieństwo zdarzenia;

R – stopa zwrotu;

α - ustalona wartość prawdopodobieństwa bliska wartości 0, np. 0.01.

Ze wzoru (3.3.46) wynika, że poziom bezpieczeństwa R_b jest to taka wartość stopy zwrotu, że osiągnięcie od niej mniejszej wartości jest mało prawdopodobne i równe α (dlatego przyjmujemy jak najmniejsze wartości α). Oczywistym jest, że im wartość R_b większa – tym lepiej.

<u>*Przykład 3.3.14*</u>

Rozważmy akcje dwóch spółek A i B o rozkładach stóp zwrotu przedstawionych w Tabeli 3.3.2. Wyznaczyć poziomy bezpieczeństwa dla akcji obu spółek przy założeniu, że prawdopodobieństwo α nieprzekroczenia poziomu bezpieczeństwa wynosi α=0.1.

Z Tabeli 3.3.2 odczytujemy, że zależność

$$P(R_{iA} < R_{bA}) = 0.1$$

zachodzi dla R_{bA}=-10% natomiast zależność

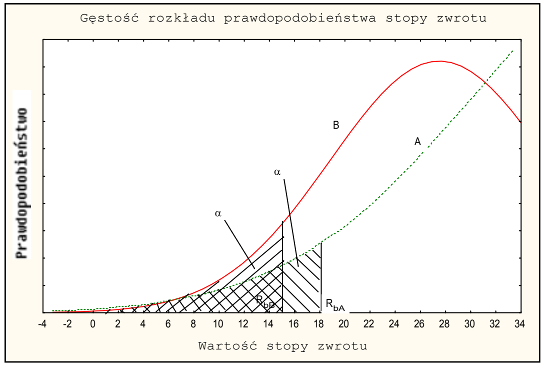
$$P(R_{iB} < R_{bB}) = 0.1$$

zachodzi dla R_{bB}=6%.

Ponieważ akcje spółki B mają wyższy poziom bezpieczeństwa (tzn. R_{bB}=6%) niż akcje spółki A (R_{bA}=-10%), więc akcje spółki B obarczone są mniejszym ryzykiem.

■

W przypadku, gdy rozkład stóp zwrotu jest rozkładem ciągłym (reprezentowanym np. przez funkcję gęstości tego rozkładu) wówczas prawdopodobieństwu α będzie odpowiadało pole powierzchni pod krzywą gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. Zobrazowano to na Wykresie 3.3.5. Dla wykresu funkcji gęstości dla akcji spółki A pole pod tą krzywą na lewo od punktu R_{bA} jest równe α natomiast dla spółki B – pod jej krzywą na lewo od punktu R_{bB}.



Wykres 3.3.5 Interpretacja poziomu bezpieczeństwa dla rozkładu ciągłego stóp zwrotu

Z Wykresu 3.3.5 widać, że akcja A ma większy poziom bezpieczeństwa niż B, więc jest mniej ryzykowna.

Drugą z miar, którą obecnie przedstawimy jest **prawdopodobieństwo nieosiągnięcia poziomu aspiracji** (*aspiration level*). Określone jest ono za pomocą następującej relacji:

(3.3.47) $$P_a = P(R < R_a)$$

gdzie:

P_a – prawdopodobieństwo nieosiągnięcia poziomu aspiracji;

R – stopa zwrotu;

R_a – ustalona przez inwestora wartość stopy zwrotu określająca poziom aspiracji.

Zauważmy, że z kolei w tym przypadku P_a jest niczym innym jak wartością dystrybuanty rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisującej stopy zwrotu dla argumentu R_a. Im wartość P_a mniejsza – tym lepiej.

Przykład 3.3.15

Dla danych jak w Tabeli 3.3.2 wyznaczyć prawdopodobieństwo nieosiągnięcia poziomu aspiracji dla akcji obu spółek, przy następujących poziomach aspiracji dla obu spółek: $R_{aA}=R_{aB}=20\%$, gdzie R_{aA} – poziom aspiracji dla spółki A, R_{aB} – poziom aspiracji dla spółki B.

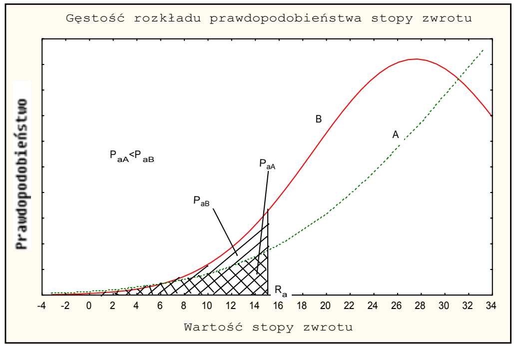
Z Tabeli 3.3.2 oraz z (3.3.47) odczytujemy, że :

- dla spółki A wartości stóp zwrotu, które są mniejsze od $R_{aA}=20\%$ dotyczą stanów o numerach 3, 4 i 5, z którymi związane są prawdopodobieństwa 0.1, 0.2 i 0.4 wobec tego
$$P_{aA}=P\left(R_A<R_{aA}\right)=P\left(R_A<20\%\right)=0.1+0.2+0.4=0.7$$
- dla spółki B wartości stóp zwrotu, które są mniejsze od $R_{aB}=20\%$ dotyczą stanów o numerach 3, 4, 5 i 6, z którymi związane są prawdopodobieństwa 0.1, 0.2, 0.4 i 0.2 wobec tego
$$P_{aB}=P\left(R_B<R_{aB}\right)=P\left(R_B<20\%\right)=0.1+0.2+0.4+2=0.9$$

Widać, że akcje spółki A obarczone są mniejszym ryzykiem, gdyż $P_{aA}<P_{aB}$, tzn. dla akcji spółki A występuje mniejsze prawdopodobieństwo nieosiągnięcia poziomu aspiracji.

■

W przypadku, gdy rozkład stóp zwrotu jest rozkładem ciągłym (reprezentowanym np. przez funkcję gęstości tego rozkładu) wówczas interpretacja prawdopodobieństwa nieosiągnięcia poziomu aspiracji może być przedstawiona jak na Wykresie 3.3.6. Dla wykresu funkcji gęstości dla akcji spółki A pole pod tą krzywą na lewo od punktu R_a jest równe P_{aA} natomiast dla spółki B – pod jej krzywą na lewo od punktu R_a jest równe P_{aB}.

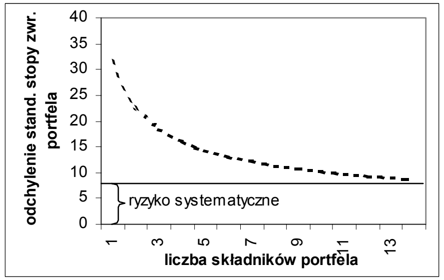


Wykres 3.3.6 Interpretacja prawdopodobieństwa nieosiągnięcia poziomu aspiracji dla rozkładu ciągłego stóp zwrotu

3.4 Dywersyfikacja portfela akcji a ryzyko

Dywersyfikacja portfela akcji polega na takim doborze akcji oraz ich udziałów w portfelu, aby minimalizować ryzyko portfela lub (i) maksymalizować oczekiwaną stopę zwrotu z portfela akcji. Dlatego też dywersyfikacja portfela może prowadzić do znacznej redukcji ryzyka całkowitego. Ryzyko to nie może być jednak w całości wyeliminowane.

Proces dywersyfikacji portfela zilustrowano na Wykresie 3.4.1.



Wykres 3.4.1 Proces dywersyfikacji portfela akcji

Rozważania nasze oprzemy o tzw. portfel dwuskładnikowy, tzn. składający się z akcji tylko dwóch spółek. Wprowadzimy następujące oznaczenia:

s_1, s_2 - odchylenia standardowe stóp zwrotu akcji spółki 1 i 2;

R_1, R_2 - oczekiwane stopy zwrotu akcji spółki 1 i 2;

ρ_{12} - współczynnik korelacji stóp zwrotu akcji obu spółek;

w_1, w_2 - udziały akcji obu spółek w portfelu, przy czym zachodzi $w_1+w_2=1$.

Oczekiwana stopa zwrotu portfela akcji dwóch spółek dana jest wzorem

(3.4.1) $$R_p=w_1\cdot R_1+w_2\cdot R_2$$

gdzie:

R_p - oczekiwana stopa zwrotu portfela dwuskładnikowego.

Wariancja V_p stopy zwrotu portfela dwuskładnikowego wyraża się wzorem:

(3.4.2) $$V_p = w_1^2 \cdot s_1^2 + w_2^2 \cdot s_2^2 + 2 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \rho_{12}$$

Z kolei **odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela dwuskładnikowego** liczymy następująco:

(3.4.3) $$s_p = \sqrt{V_p}$$

<u>*Przykład 3.4.1*</u>

Rozpatrzmy akcje dwóch spółek A i B. Tygodniowe stopy zwrotu, ich wariancje oraz współczynnik korelacji dla obu spółek wynoszą:

R_A=0.0209=2.09% R_B=0.0095=0.95%
V_A=0.002992 V_B=0.001306
ρ_{AB}=0.5

W obecnej chwili cena akcji spółki A wynosi 70zł, a akcji spółki B - 40zł. Inwestor dysponuje kwotą 1100zł, za którą może kupić
a) 10 akcji spółki A i za resztę - akcje spółki B
lub
b) 15 akcji spółki A i za resztę akcje spółki B.
Która z decyzji (a lub b) jest lepsza z punktu widzenia oczekiwanej stopy zwrotu i wariancji stopy zwrotu (tygodniowych).

<u>Ad. a)</u>

Zakupując 10 akcji spółki A inwestor zapłaci 10x70zł=700zł. Stanowi to

$$w_A = \frac{700}{1100} = 0,6363$$

udziału w portfelu (63.63% wartości portfela). Za pozostałe 1100zł-700zł=400zł może kupić $\frac{400}{40} = 10$ akcji spółki B. Będą one stanowiły

$$w_B = \frac{400}{1100} = 0,3637$$

udziału w portfelu (36.37% wartości portfela).

Oczekiwana stopa zwrotu (tygodniowa) portfela dla tego przypadku wyniesie (wzór (3.4.1)):

$$R_p = w_A \cdot R_A + w_B \cdot R_B = 0.6363 \cdot 0.0209 + 0.3637 \cdot 0.0095 = 0.0168 = 1.68\%$$

Wariancję stopy zwrotu (tygodniową) portfela wyliczymy z (3.4.2):

$$V_p = w_A^2 \cdot s_A^2 + w_B^2 \cdot s_B^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot s_A \cdot s_B \cdot \rho_{AB} = 0.6363^2 \cdot 0.002992 +$$
$$+ 0.3637^2 \cdot 0.001306 + 2 \cdot 0.6363 \cdot 0.3637 \cdot \sqrt{0.002992} \cdot \sqrt{0.001306} \cdot 0.5 =$$
$$= 0.001211 + 0.0001728 + 0.0004575 = 0.001841$$

a odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela:

$$s_p = \sqrt{V_p} = \sqrt{0.001841} = 0.0429 = 4.29\%$$

<u>Ad. b)</u>

Zakupując 15 akcji spółki A inwestor zapłaci 15x70zł=1050zł. Stanowi to

$$w_A = \frac{1050}{1100} = 0,9545$$

udziału w portfelu (95.45% wartości portfela). Za pozostałe 1100zł-1050zł=50zł może kupić $\left\lfloor \frac{50}{40} \right\rfloor = 1$ akcję spółki B. Będzie ona stanowiła

$$w_B = \frac{40}{1100} = 0,0455$$

udział w portfelu (4.55% wartości portfela).
Oczekiwana stopa zwrotu (tygodniowa) portfela dla tego przypadku wyniesie:

$$R_p = w_A \cdot R_A + w_B \cdot R_B = 0.9545 \cdot 0.0209 + 0.0455 \cdot 0.0095 = 0.0204 = 2.04\%$$

Wariancja stopy zwrotu (tygodniowa) portfela:

$$V_p = w_A^2 \cdot s_A^2 + w_B^2 \cdot s_B^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot s_A \cdot s_B \cdot \rho_{AB} = 0.9545^2 \cdot 0.002992 +$$
$$+ 0.0455^2 \cdot 0.001306 + 2 \cdot 0.9545 \cdot 0.0455 \cdot \sqrt{0.002992} \cdot \sqrt{0.001306} \cdot 0.5 =$$
$$= 0.00272 + 0.0000027 + 0.000086 = 0.00281$$

a odchylenie standardowe stopy zwrotu tego portfela (wzór (3.4.3)):

$$s_p = \sqrt{V_p} = \sqrt{0.00281} = 0.053 = 5.3\%$$

Zauważmy, że dla portfela z punktu a) mamy mniejszą wariancję (czyli mniejsze ryzyko) niż dla portfela z punktu b), ale z kolei oczekiwana stopa zwrotu dla portfela z punktu b) jest większa, niż dla portfela z punktu a). Trudno zdecydować, który z tych portfeli jest lepszy. Zależy to od preferencji decydenta, czyli od tego, czy bardziej zależy mu na maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu, czy też na minimalizacji ryzyka mierzonego za pomocą wariancji lub odchylenia standardowego stopy zwrotu z portfela. Ponadto wpływ na decyzję będzie miała skłonność decydenta do ryzyka.

■

3.5 Teoria użyteczności, awersja do ryzyka

3.5.1 Elementy teorii użyteczności

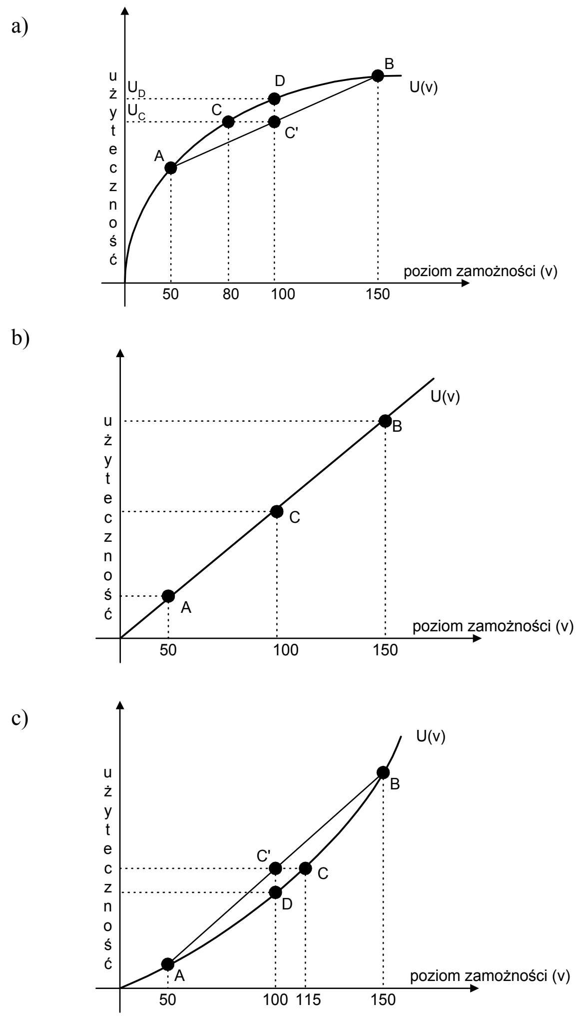
Użyteczność jest miarą satysfakcji. Źródłem jej jest konsumpcja. Konsumpcja natomiast wymaga pieniędzy. Stąd też skupimy się na decyzjach inwestycyjnych i ich wpływie na poziom zamożności.

Wykresy 3.5.1a), b) i c) przedstawiają zależności między użytecznością a poziomem zamożności trzech różnych inwestorów:

- a) dotyczy inwestora cechującego się awersją do ryzyka;
- b) dotyczy inwestora cechującego się neutralnością wobec ryzyka;
- c) dotyczy inwestora cechującego się preferowaniem ryzyka.

Przeanalizujmy pierwszego inwestora. Jego użyteczność rośnie, jednak ten wzrost ma tempo malejące.

Załóżmy, że inwestor ten ma do wyboru dwie inwestycje: pewną i ryzykowną. Druga z nich charakteryzuje się tym, że jej wybór może doprowadzić do osiągnięcia przez inwestora poziomu zamożności 50 tys. z prawdopodobieństwem 0.5 lub 150 tys. również z prawdopodobieństwem 0.5.



Wykres 3.5.1 Wykresy zależności między użytecznością a poziomem zamożności trzech inwestorów

Oczekiwany poziom zamożności inwestora wynosi:

$$\bar{v} = 0.5 \cdot 50 tys. + 0.5 \cdot 150 tys. = 100 tys.$$

Oczekiwana użyteczność związana z inwestycją ryzykowną wynosi:

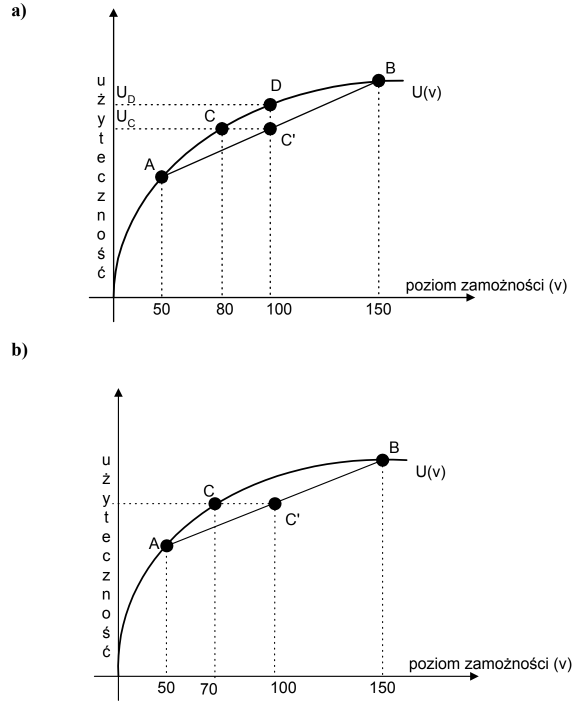
$$\overline{U}_r = 0.5 \cdot U(50tys.) + 0.5 \cdot U(150tys.) = U_C$$

Na wykresie 3.5.1a) oczekiwana użyteczność i oczekiwany poziom zamożności inwestora zobrazowano za pomocą punktu C' leżącego na środku odcinka $\overline{AB}$. Zauważmy, że oczekiwana użyteczność $\overline{U}_r = U_C$ związana z ryzykownym projektem jest mniejsza od użyteczności $\overline{U}_p = U_D$ projektu pewnego, która pozwoli osiągnąć ten sam poziom bogactwa równy 100tys. Obrazuje to punkt D na wykresie 3.5.1a). Ponieważ użyteczność $\overline{U}_p = U_D$ projektu pewnego jest większa od użyteczności $\overline{U}_r = U_C$ projektu ryzykownego, stąd inwestor powinien wybrać pierwszy rodzaj inwestycji.

Warto zwrócić uwagę na występowanie inwestycji pewnej (punkt C), która ma tę samą użyteczność co projekt ryzykowny (punkt C'). W sensie użyteczności inwestorowi jest więc obojętne czy wybierze inwestycję pewną C, czy ryzykowną C'.
Poziom zamożności związany z inwestycją pozbawioną ryzyka nazywa się **ekwiwalentem pewności inwestycji ryzykownej o tej samej użyteczności**. W przykładzie podanym na wykresie 3.5.1a), ekwiwalentem pewności inwestycji ryzykownej jest 80tys.
Dla inwestorów charakteryzujących się **malejącą krańcową użytecznością** (tzn. gdy tempo wzrostu użyteczności maleje) ekwiwalent pewności inwestycji ryzykownej jest zawsze mniejszy od jej oczekiwanej wartości. Wielkość tego ekwiwalentu zależy od rodzaju funkcji użyteczności.
Wykres 3.5.1b) przedstawia funkcję użyteczności inwestora charakteryzującego się **neutralną postawą wobec ryzyka**. W takim przypadku, ekwiwalent pewności każdej inwestycji ryzykownej jest taki sam, jak jej oczekiwany poziom zamożności.
Wykres 3.5.1c) dotyczy inwestorów wykazujących **rosnącą krańcową użyteczność** (tzn. tempo wzrostu użyteczności rośnie). Ekwiwalent pewności jest większy od oczekiwanej zamożności odpowiadającej ryzykownej inwestycji. Oznacza to, że inwestor skłonny jest dopłacić, aby móc podjąć ryzyko.

3.5.2 Awersja do ryzyka

Wykresy 3.5.2a) i 3.5.2b) przedstawiają funkcje użyteczności inwestorów charakteryzujących się różną awersją do ryzyka.



Wykres 3.5.2 Wykresy funkcji użyteczności inwestorów charakteryzujących się różną awersją do ryzyka

Dla pierwszego wykresu ekwiwalent pewności wynosi 80tys., zaś dla drugiego - 70tys. Drugi inwestor charakteryzuje się większą awersją do ryzyka niż pierwszy. Natomiast w obu przypadkach oczekiwana zamożność z inwestycji ryzykownych wynosi 100tys.
Na podstawie tych wartości możemy określić jakiej **oczekiwanej stopy zwrotu *E{R}* z ryzykownej inwestycji wymagają ci inwestorzy**.

Dla pierwszego inwestora:

$$E\{R\} = \frac{100tys. - 80tys.}{80tys.} = 25\%$$

Dla drugiego inwestora:

$$E\{R\} = \frac{100tys. - 70tys.}{70tys.} = 42\%$$

Z powyższych obliczeń wynika, że inwestor charakteryzujący się większą awersją do ryzyka wymaga większej stopy zwrotu z inwestycji ryzykownej, czyli wymaga tzw**. premii za ryzyko** równej 42%. Pierwszy natomiast jedynie 25%.
Miarą awersji do ryzyka jest tzw. **bezwzględna awersja do podejmowania ryzyka**:

(3.5.1) $$R_a(v) = -\frac{U''(v)}{U'(v)}$$

gdzie:

v - poziom zamożności inwestora;

U', U'' - odpowiednio: pierwsza i druga pochodna funkcji użyteczności.

Miara ta opiera się na stopniu wklęsłości funkcji użyteczności.
Drugą miarą awersji do ryzyka jest tzw. **względna awersja do podejmowania ryzyka**:

(3.5.2) $$R_r(v) = v \cdot R_a(v) = -v \cdot \frac{U''(v)}{U'(v)}$$

Jeśli inwestor charakteryzuje się malejącą, bezwzględną awersją do ryzyka, wówczas wraz ze wzrostem poziomu swej zamożności będzie przeznaczał coraz więcej pieniędzy na ryzykowne inwestycje.
Jeżeli inwestor charakteryzuje się malejącą, względną awersją do ryzyka, to wraz ze wzrostem swojej zamożności będzie przeznaczał na ten cel coraz większą część posiadanych środków.
Jeżeli inwestor wykazuje stałą, względną awersję do ryzyka, wtedy bezwzględna awersja do ryzyka maleje.
Obserwacje zachowań ludzkich potwierdzają tezę, że ludzi cechuje malejąca, bezwzględna awersja do ryzyka oraz stała lub malejąca, względna awersja.

Przykłady funkcji użyteczności w przypadku awersji do ryzyka:

- funkcja logarytmiczna

(3.5.3) $U(v) = a + b \cdot \ln(v)$

(3.5.4) $R_a(v) = \frac{1}{v}$ - rosnąca, ze wzrostem v;

(3.5.5) $R_r(v) = 1$ - stała.

- funkcja wykładnicza

(3.5.6) $U(v) = \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot v}$

(3.5.7) $R_a(v) = a$ - stała;

(3.5.8) $R_r(v) = v \cdot a$ - rosnąca;

- funkcja potęgowa

(3.5.9) $U(v) = \frac{v^b}{b}$, $b \in (0,1)$

(3.5.10) $R_a(v) = \frac{1-b}{v}$ - malejąca;

(3.5.11) $R_r(v) = 1 - b$ - stała.

- funkcja kwadratowa

(3.5.12) $U(v) = a - b \cdot v^2$,

(3.5.13) $R_a(v) = \frac{2 \cdot b}{1 - 2 \cdot b \cdot v}$ - rosnąca;

(3.5.14) $R_r(v) = \frac{2 \cdot b \cdot v}{1 - 2 \cdot b \cdot v}$ - rosnąca.