Ekonometria cz. III

Wykład nr 1:

Istota badań operacyjnych.
Modelowanie problemów decyzyjnych.

Prowadzący: **dr inż. Zbigniew TARAPATA**

Dane kontaktowe:

e-mail: Zbigniew.Tarapata@isi.wat.edu.pl

WWW: http://zbigniew.tarapata.akcja.pl/p_ekonometria/

tel. (w ostateczności !!!) **: 0-606-45-54-80**

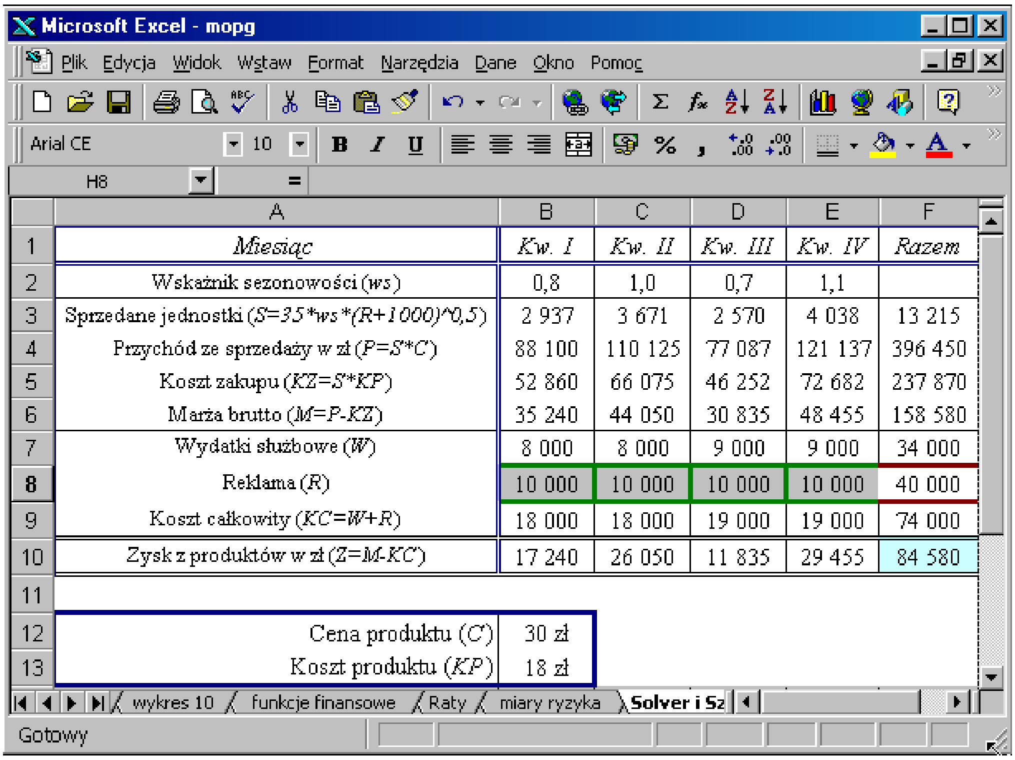
UWAGA!
Hasło do pobrania materiałów z wykładów ze strony WWW podaje wykładowca.

NASZ PIERWSZY PROBLEM

Posłużymy się typowym modelem marketingowym opisującym wzrost sprzedaży od wartości wyjściowych (na przykład w wyniku działań sprzedawców) wraz ze wzrostem kosztów reklamy (oznaczanej symbolem R_t), ale ze zmniejszającymi się efektami (patrz rysunek poniżej).

Stoimy przed następującym PROBLEMEM DECYZYJNYM:

W jakiej wysokości ustalić budżet na reklamę w poszczególnych kwartałach, aby maksymalizować wysokość spodziewanych zysków ?



	A	B	C	D	E	F
1	*Miesiąc*	*Kw. I*	*Kw. II*	*Kw. III*	*Kw. IV*	*Razem*
2	Wskaźnik sezonowości (*ws*)	0,8	1,0	0,7	1,1	
3	Sprzedane jednostki (*S=35*ws*(R+1000)^0,5*)	2 937	3 671	2 570	4 038	13 215
4	Przychód ze sprzedaży w zł (*P=S*C*)	88 100	110 125	77 087	121 137	396 450
5	Koszt zakupu (*KZ=S*KP*)	52 860	66 075	46 252	72 682	237 870
6	Marża brutto (*M=P-KZ*)	35 240	44 050	30 835	48 455	158 580
7	Wydatki służbowe (*W*)	8 000	8 000	9 000	9 000	34 000
8	Reklama (*R*)	10 000	10 000	10 000	10 000	40 000
9	Koszt całkowity (*KC=W+R*)	18 000	18 000	19 000	19 000	74 000
10	Zysk z produktów w zł (*Z=M-KC*)	17 240	26 050	11 835	29 455	84 580
11						
12	Cena produktu (*C*)	30 zł				
13	Koszt produktu (*KP*)	18 zł				

Prognozowana wielkość sprzedaży S_t w t-tym kwartale została opracowana na podstawie modelu prognozy zbudowanego w oparciu o dane historyczne przedsiębiorstwa: $S_t = 35 \cdot ws_t \cdot \sqrt{R_t + 1000}$, gdzie ws_t oznacza wskaźnik sezonowości mający wpływ na wielkość sprzedaży w t-tym kwartale, a R_t – nakłady na reklamę w t-tym kwartale. Pozostałe wielkości mające wpływ na zysk są następujące:

- zysk z produkcji w t-tym kwartale wyraża się za pomocą formuły: $Z_t = M_t - KC_t$, gdzie M_t oznacza marżę brutto w t-tym kwartale, a KC_t – koszt całkowity produkcji;
- marża brutto jest różnicą między przychodem ze sprzedaży a kosztem materiałowym, tzn. $M_t = S_t \cdot (C - KP)$, gdzie S_t – jest wielkością sprzedaży, C – jest ceną produktu, KP – kosztem materiałowym;
- koszt całkowity produkcji jest sumą wydatków służbowych i na reklamę, tzn. $KC_t=W_t+R_t$, gdzie W_t – wydatki służbowe w t-tym kwartale, R_t – wydatki na reklamę w t-tym kwartale.

Miesiąc	Kw. I	Kw. II	Kw. III	Kw. IV	Razem
Wskaźnik sezonowości (ws)	0,8	1,0	0,7	1,1	
Sprzedane jednostki (S=35*ws*(R+1000)^0,5)	2 571	4 017	1 968	4 861	13 417
Przychód ze sprzedaży w zł (P=S*C)	77 130	120 515	59 053	145 824	402 521
Koszt zakupu (KZ=S*KP)	46 278	72 309	35 432	87 494	241 513
Marża brutto (M=P-KZ)	30 852	48 206	23 621	58 329	161 009
Wydatki służbowe (W)	8 000	8 000	9 000	9 000	34 000
Reklama (R)	7 431	12 174	5 455	14 940	40 000
Koszt całkowity (KC=W+R)	15 431	20 174	14 455	23 940	74 000
Zysk z produktów w zł (Z=M-KC)	15 421	28 033	9 166	34 389	87 009
Cena produktu (C)	30 zł				
Koszt produktu (KP)	18 zł				

Optymalna struktura budżetu na reklamę maksymalizująca zyski (przy założeniu, że budżet na reklamę jest ograniczony i wynosi 40tys.).

Optymalna struktura budżetu na reklamę maksymalizująca zyski (przy założeniu, że budżet na reklamę jest nieograniczony).

Miesiąc	Kw. I	Kw. II	Kw. III	Kw. IV	Razem
Wskaźnik sezonowości (ws)	0,8	1,0	0,7	1,1	
Sprzedane jednostki (S=35*ws*(R+1000)^0,5)	3 294	5 289	2 466	6 442	17 492
Przychód ze sprzedaży w zł (P=S*C)	98 834	158 679	73 988	193 256	524 757
Koszt zakupu (KZ=S*KP)	59 301	95 207	44 393	115 953	314 854
Marża brutto (M=P-KZ)	39 534	63 472	29 595	77 302	209 903
Wydatki służbowe (W)	8 000	8 000	9 000	9 000	34 000
Reklama (R)	12 844	21 838	9 133	26 996	70 811
Koszt całkowity (KC=W+R)	20 844	29 838	18 133	35 996	104 811
Zysk z produktów w zł (Z=M-KC)	18 690	33 633	11 462	41 306	105 091
Cena produktu (C)	30 zł				
Koszt produktu (KP)	18 zł				

Odpowiedzią m.in. na postawione wcześniej pytanie zajmują się **BADANIA OPERACYJNE**

BADANIA OPERACYJNE (BO)

(ang. *operations research, operational research*)

DEFINICJE

- **„... badanie procesów zamierzonych (operacji) i wypracowanie, opierając się na metodach matematycznych, wniosków i zaleceń umożliwiających podejmowanie optymalnych decyzji dotyczących organizacji i kierowania tymi procesami ...” („Leksykon Wiedzy Wojsk.”),**
- **„... badania operacyjne są zastosowaniem metodycznej analizy i logicznego myślenia do rozważania różnych możliwych kierunków działania (R.T. Eddison: „Badania operacyjne w zarządzaniu ”),**
- **„... wyznaczenie optymalnych rozwiązań różnorodnych problemów, głównie technicznych, organizacyjnych, ekonomicznych i wojskowych za pomocą zespołu metod matematyczno-statystycznych...” („Wielka Encyklopedia Powszechna”),**
- **„... to teoria działania zespołów, mająca na celu ulepszenie organizacji kierowania ich działaniem...” (S. Piasecki: „Badania operacyjne”),**
- **„... b.o. tworzą zbiór naukowych metod zarządzania, zastępujących metody intuicyjne w złożonych i b. złożonych warunkach występowania sytuacji decyzyjnych...”.**

GENEZA BO

Prekursorzy badań operacyjnych:

- **Aleksander Macedoński (utworzenie falangi);**
- **Archimedes (organizacja obrony Syrakuz);**
- **N. Tartaglia (wyznaczenie kąta strzału, przy którym zasięg pocisku jest największy);**
- **W.F. Lanchester (opisanie kompleksowych działań bojowych układami równań różniczkowych);**
- **T.R. Edison (opracowanie w 1917 r. sposobu walki z niemieckimi okrętami podwodnymi);**
- **F.W. Taylor (twórca zasad naukowej organizacji pracy, ustalił m.in. optymalne rozmiary łopaty);**
- **H.C. Levinson (zastosowanie metod matematycznych w zagadnieniach organizacji handlu wewnętrznego);**
- **A.K. Erlang (projektowanie optymalnych automatycznych centrali telefonicznych);**
- **L.W. Kantorowicz (matematyczne metody organizacji i planowania produkcji)**

GENEZA BO, c.d.1

Pierwsze ośrodki badań operacyjnych:

- **Bawdsey Research Station (Anglia, 1939 r.)**

  Pierwszy na świecie ośrodek zajmujący się badaniami operacyjnymi w związku z wprowadzeniem na uzbrojenie wojsk angielskich pierwszych stacji radiolokacyjnych.

- **„Cyrk Blacketta" (VIII 1940, Anglia)**

  Grupa składająca się z 3 fizjologów, 3 fizyków, 2 matematyków, astronoma i oficera powstała przy dowództwie obrony przeciwlotniczej Anglii.

ISTOTA BO

Podstawowym przedmiotem badań operacyjnych są decyzje.

Do analizy decyzji w badaniach operacyjnych posługujemy się:

- **metodami matematycznymi (w szczególności optymalizacyjn.);**
- **metodami heurystycznymi;**
- **symulacją komputerową.**

W analizie operacji rozważa się pewne systemy decyzyjne. Są to uporządkowane zbiory elementów mających wspólny cel.

Rozwój układów gospodarczych, firm, banków itp., jak i technologii coraz bardziej komplikuje relacje między elementami tych systemów.

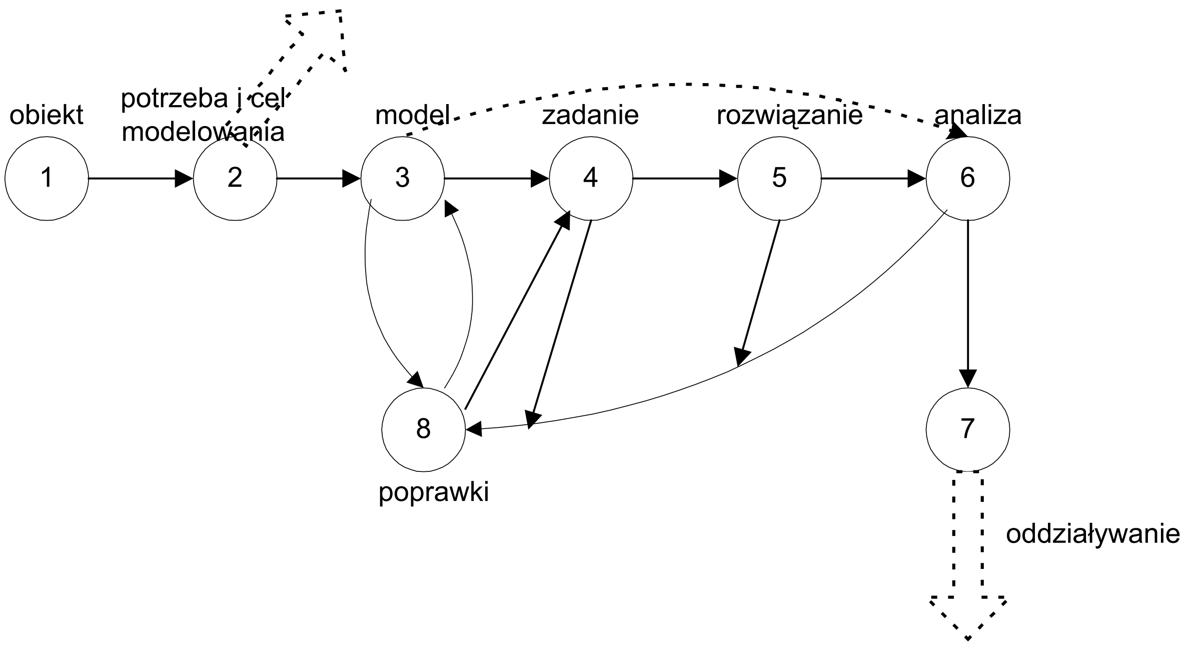
Dlatego też niezbędne stało się dokonanie analizy i zobiektywizowanie ocen podejmowanych decyzji w dziedzinie zarządzania tymi układami.

W tym celu została wypracowana określona metodologia badań operacyjnych, na którą składają się etapy badań operacyjnych.

ISTOTA BO, c.d.1

ETAPY BADANIA OPERACYJNEGO:

1) **określenie obiektu rzeczywistego i sformułowanie problemu z nim związanego,**
2) **określenie potrzeby modelowania formalnego (matematycznego) i konkretyzacja celu modelowania,**
3) **budowa modelu formalnego uwzględniającego cel modelowania,**
4) **formułowanie zadań (np. optymalizacyjnych) w języku modelu,**
5) **rozwiązywanie sformułowanych zadań,**
6) **analiza otrzymanych rozwiązań lub badanie modelu,**
7) **opracowanie projektu oddziaływania na obiekt rzeczywisty i ewentualny udział w jego wdrażaniu.**



Rys. Etapy badań operacyjnych

ISTOTA BO, c.d.2

OBIEKT RZECZYWISTY – fragment rzeczywistości, którym zainteresowany jest człowiek w konkretnej sytuacji;

MODELOWANIE MATEMATYCZNE - proces, którego rezultatem, w wyniku przeprowadzenia pewnych badań poznawczych jest model matematyczny ustalonego obiektu rzeczywistego, uwzględniający problem z nim związany i cele modelowania.

BADANIA POZNAWCZE (działania poznawcze) - postępowanie charakterystyczne dla analizy systemowej i badań operacyjnych i obejmują:

- **obserwacją obiektu rzeczywistego;**
- **konceptualizację (wybór istotnych cech obiektu);**
- **idealizację (określenie związków między głównymi z istotnych cech obiektu);**
- **konkretyzację (określanie związków między istotnymi cechami obiektu rozszerzanymi o c. ubocz.);**
- **weryfikację (logiczne i empiryczne sprawdzenie związków między istotnymi cechami obiektu);**
- **preparację (podjęcie działań praktycznych prowadzących do zaspokojenia konkretnych potrzeb.**

MODEL

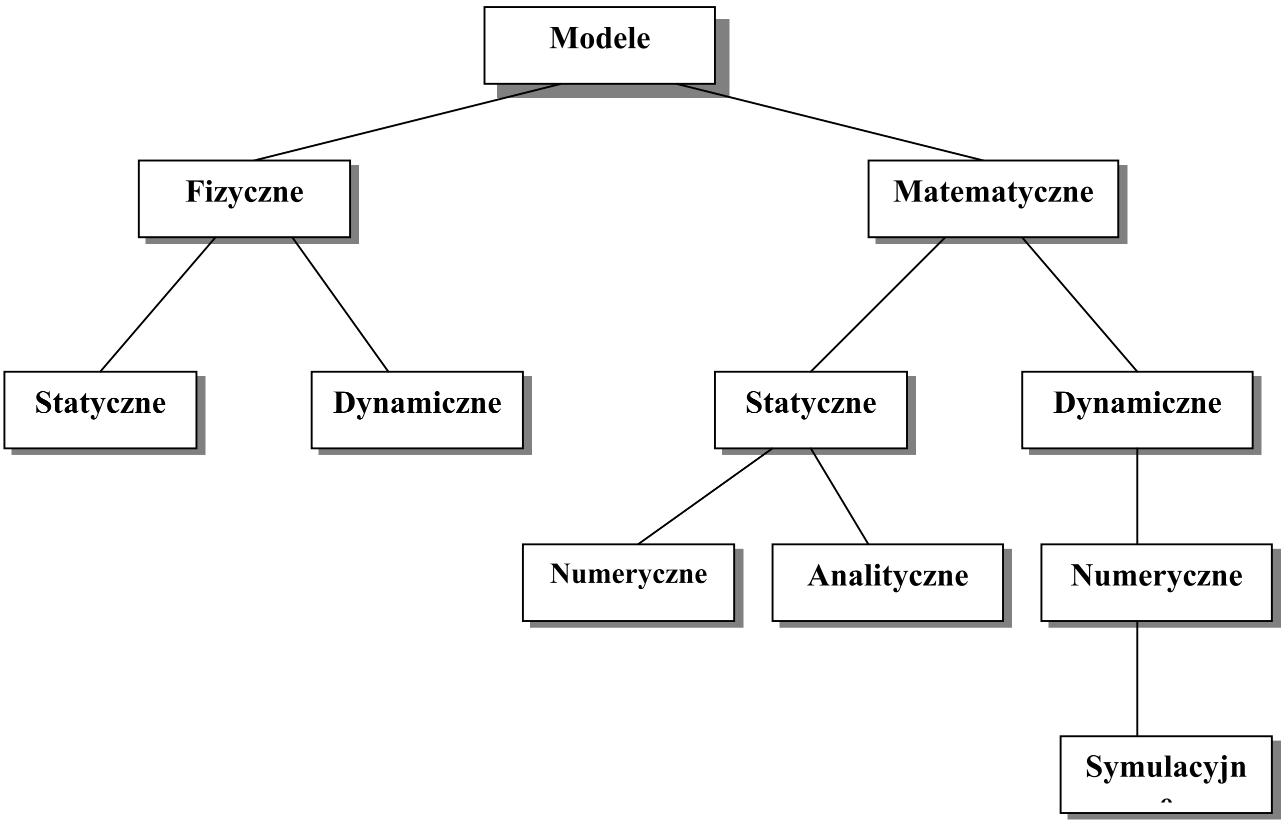
a) „taki dający się pomyśleć lub materialnie zrealizować układ, który odzwierciedlając lub odtwarzając przedmiot badania, zdolny jest go zastępować tak, że jego badanie dostarcza nam nowej informacji o tym przedmiocie (W. Staff w „Modelowanie i filozofia”);

b) „reprezentacja badanego zjawiska w postaci innej niż postać, w jakiej występuje ono w rzeczywistości (W. Findeisen i J. Gutenbaum w: „Analiza systemowa)”.

MODELE STOSOWANE W BO

Modele służące do opisu typowych sytuacji decyzyjnych* w przedsiębiorstwie:

- **model podziału;**
- **model komiwojażera;**
- **model kolejek;**
- **model przedsięwzięcia, inne.**



Rys. Rodzaje modeli.

*** Sytuacja decyzyjna to taka, w której podejmujemy decyzje.**

MODELE STOSOWANE W BO, c.d.1

Rodzaj sytuacji decyzyjnej / Horyzont czasowy podejmowanych decyzji		Sytuacje deterministyczne	Sytuacje losowe i niepewne	Sytuacje konfliktowe
		Modele deterministyczne	Modele probabilistyczne, symulacyjne i heurystyczne	Modele konkurencji
Krótki	Jednostadialne procesy decyzyjne	Metody bilansowe Metody optymalizacyjne (statyczne)	Metody statystyczne i probabilistyczne Metody symulacyjne Metody heurystyczne	Gry dwuosobowe z sumą zero
Długi	Wielostadialne procesy decyzyjne	Jak wyżej: plus dynamiczne metody optymalizacyjne (deterministyczne)	Jak wyżej: plus dynamiczne metody optymalizacyjne (probabilistyczne)	Jak wyżej: plus gry wieloosobowe oraz wieloosobowe gry koalicyjne

Tabela. Matematyczne metody rozwiązywania problemów zarządzania

W badaniach operacyjnych mamy do czynienia z różnorodnymi sytuacjami decyzyjnymi (deterministyczne, losowe i niepewne, konfliktowe).

Każdemu matematycznemu modelowi sytuacji decyzyjnej odpowiadać będą określone matematyczne metody rozwiązywania problemów zarządzania.

ZASTOSOWANIA BO

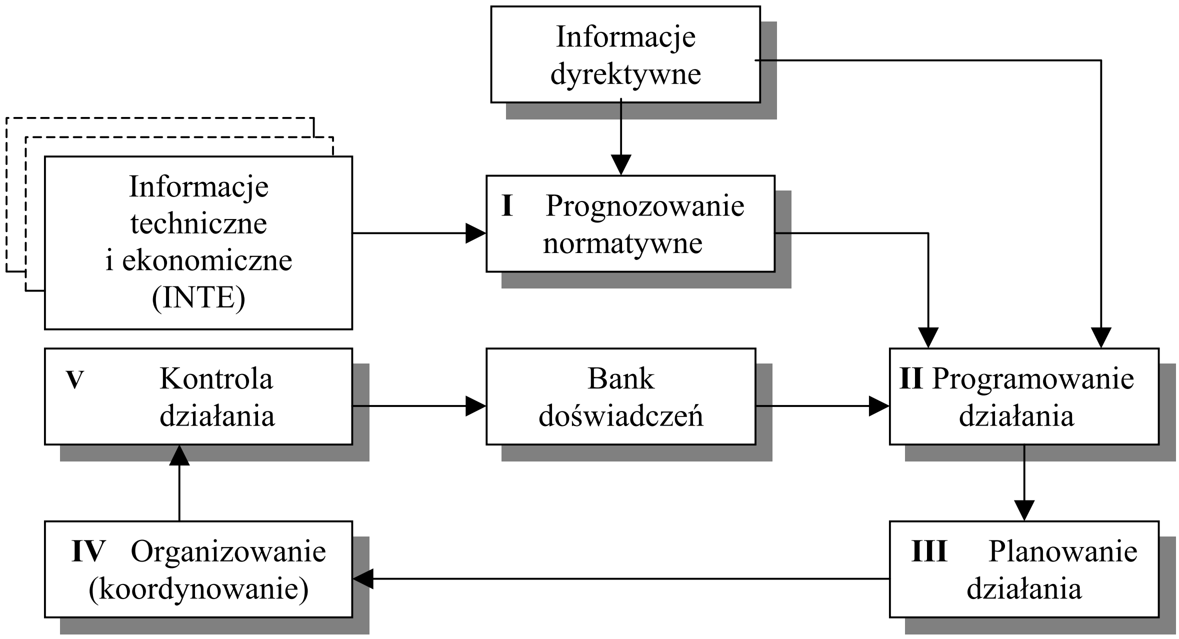
Przykładowe zastosowania i sukcesy BO w czasie II Wojny Światowej

Zastosowanie BO	Skutek
projektowanie optymalnej struktury obrony plot.	wzrost liczby niszczonych samolotów niemieckich przez artylerię plot.
stworzenia skutecznego systemu wykrywania okrętów podwodnych	zwiększenie liczby niszczonych okrętów podwodnych npla
stworzenie odpowiedniej organizacji konwojów morskich	zmniejszenie strat własnych w konwojach morskich
opracowanie najbezpieczniejszego sposobu minowania akwenów morskich przez samoloty	zmniejszenie z 10-15% do ok. 0,1% strat w bombowcach B-29 w trakcie minowania obszarów morskich
opracowanie strategii walki z kamikaze	zmniejszenie z 47% do 29% strat w okrętach prowadzących walkę z kamikaze

Ogłoszony zaraz po wojnie raport rządu brytyjskiego, oceniający wkład nauki w dzieło obrony kraju przed inwazją hitlerowską, najwyższą notą wyróżnił radar, sonar oraz badania operacyjne.

ZASTOSOWANIA BO, c.d.1

Po II wojnie światowej nastąpił gwałtowny rozwój BO oraz znaczny wzrost popytu na specjalistów z dziedziny BO.



Rys. 2. Schemat procesu zarządzania przedsiębiorstwem jako procesu podejmowania decyzji.

Metody badań operacyjnych (nazywane często: ilościowymi technikami zarządzania) znajdują zastosowanie na prawie każdym etapie procesu podejmowania decyzji przy zarządzaniu przedsiębiorstwem (tabela na następnej stronie).

ZASTOSOWANIA BO, c.d.2

Ilościowe techniki zarządzania → (Metody badań operacyjnych) / Funkcje zarządzania ↓		Metody prognozowania	Metody symulacyjne	Metody analizy strukturalnej	Programowanie dynamiczne	Programowanie liniowe i nieliniowe	Algebra macierzy i wektorów	Metody sieciowe	Metody statystyczne
Określenie szczegółowych celów (zadań) działalności przedsiębiorstwa	Dysponowanie środkami przedsiębiorstwa do osiągania celów (zadań) szczegółowych								
	I prognozowanie								
	II programowanie								
	III planowanie								
IV Koordynacja wszystkich elementów działalności przedsiębiorstwa									
V Kontrola wszystkich elementów działalności przedsiębiorstwa									

Tab. Najważniejsze ilościowe techniki zarządzania (zaciemnione prostokąty oznaczają dziedziny szczególnie częstego stosowania poszczególnych technik zarządzania)

Optymalizacja jest zaawansowaną techniką analityczną korzystającą z algorytmów, szerokiej gamy modeli, przewidywania, symulacji, analizy, zarządzania wiedzą i danymi. Technologie te w połączeniu z teorią organizacji i zarządzaniem dają decydentowi możliwość lepszego zrozumienia przeszłości, teraźniejszości i przyszłości będącego podstawą lepszego podejmowania decyzji.

ZASTOSOWANIA BO, c.d.3

Przykłady wykorzystania BO w firmach:

- ***Generals Motors Corporation*:**
  - **Dobór tworzyw, które należy stosować przy produkcji części,**
  - **Badanie wpływu stosowania różnych materiałów na poziom kosztów produkcji;**
- ***Foremost – MC Kessen Incorporation*:**
- **Dostosowanie punktów sprzedaży do potrzeb rynkowych;**
- ***Standard Oil Company*:**
- **Dobór składników smarów (po rozwiązaniu tego zadania koszt przeprowadzenia jednorazowych badań zmniejszył się z 240.000 \$ do 3.000 \$);**

Tabela ***Przykłady popularności zastosowań symulacji w organizacjach krajów przodujących gospodarczo (dane z drugiej połowy lat 80-tych)***

(Źródło: Radosiński E. (red.) : Zastosowanie modelowania i symulacji komputerowej w analizie przedsiębiorstwa. Polskie Towarzystwo Symulogiczne, Kraków-Katowice-Wrocław 1991)

Obszar funkcjonalny	*Procent organizacji wykorzystujących symulację*
Produkcja	**59**
Planowanie na szczeblu korporacji	**53**
Inżynieria	**46**
Finanse	**41**
Badania i rozwój	**37**
Marketing	**24**
Przetwarzanie danych	**16**
Kadry	**10**

ZASTOSOWANIA BO, c.d.4

PRZYPADEK LINII LOTNICZYCH CONTINENTAL AIRLINES

Zadanie postawione grupie badaczy operacyjnych: <u>Opracować model postępowania w przypadku katastrofy uniemożliwiającej korzystanie z niektórych lotnisk.</u>

Wyjściowym pytaniem, które rozpoczęło prace nad projektem było:

„W jaki sposób linie Continental Airlines mogłyby powrócić szybko do normalnego funkcjonowania jeśli lotnisko O'Hare w Chicago byłoby zamknięte z powodu zamieci śnieżnej na jeden dzień?"

<u>Dane o lotach Continental Airlines :</u>

- **1400 lotów dziennie,**
- **zatrudniały 5000 pilotów i 9000 stuardów i stuardes;**
- **dodatkowo działanie ich musi spełniać skomplikowane wymogi bezpieczeństwa organizacji FAA – Federal Aviation Administration.**

W 2000 roku, jako wynik pracy grupy badań operacyjnych, ukończony został system CrewSolver, który razem z OpsSolverem tworzy pakiet <u>*RecoverySuit*</u>. Pakiet ten umożliwia stworzenie optymalnego planu wykorzystania istniejących zasobów – lotnisk, samolotów, ludzi – w każdej trudnej sytuacji: katastrofy atmosferycznej, choroby ludzi, korków powietrznych, awarii technicznych – w bardzo krótkim czasie.

Charakterystyka systemu <u>*RecoverySuit*</u>:

- **dokonuje kompleksowej analizy sytuacji, przyporządkowując wybranym celom środki, zarówno techniczne jak i ludzkie;**
- **planuje trasy przelotów, międzylądowania, załogę samolotów tak, by zasoby były jak najlepiej wykorzystane, a parametry usług – czas i koszty – na jak najlepszym poziomie;**
- **pozwala na analizę sytuacji teoretycznych „co by było gdyby", na podstawie których linie lotnicze mogą przygotować zawczasu potrzebne środki maksymalizując oczekiwany zysk i komfort klientów.**

30 grudnia 2000 roku Nowy Jork nawiedziła najgorsza burza śnieżna od 1996 roku. Wszystkie główne linie lotnicze musiały zredukować liczbę lotów północno-wschodnich o 35% pierwszego dnia, o dalsze 35% dnia następnego. Dotknęło to ponad 350 członków załóg pokładowych. Dzięki systemowi *RecoverSuite* linie lotnicze były w stanie znaleźć optymalne rozwiązanie dotyczące połączeń, lądowisk, przyporządkowania załóg <u>w czasie pięciu minut</u>! Plan <u>został wdrożony do południa następnego po burzy śnieżnej dnia</u>, podczas kiedy inne linie, nie korzystające z *RecoverSuite* potrzebowały na ustabilizowanie pracy <u>kilku dni</u>. Ponadto, plan zaproponowany przez *RecoverySuite* potrzebował minimalnej liczby dodatkowych środków. W rezultacie <u>Continental Airlines poniosły minimalne koszty</u>, zachowały wiodącą pozycję na rynku oraz zapewniły maksymalny możliwy komfort swoim pracownikom.

MODELOWANIE PROBLEMÓW DECYZYJNYCH

Decyzja dopuszczalna – taka decyzja, która jest zgodna z warunkami ograniczającymi.

Decyzja optymalna – decyzja najlepsza w świetle celów, jakie stawia sobie decydent,

Kryterium wyboru (oceny) – kryterium wg którego oceniamy decyzje jako lepsze lub gorsze.

Przykład

Możemy podjąć jedną z trzech decyzji inwestycyjnych. Nakłady inwestycyjne oraz oczekiwany roczny zysk osiągnięty z tych inwestycji przedstawia tabela. Która z trzech decyzji jest optymalna?

Decyzje	A	B	C
Nakłady inwestycyjne (mln PLN)	40	50	30
Przewidywane roczne zyski (mln PLN)	8	4	6

Rozwiązanie

Na pytanie to nie możemy odpowiedzieć, gdyż nie zostało określone żadne kryterium wyboru.

Jeżeli *kryterium = minimalizacja nakładów* , to decyzja C

Jeżeli *kryterium* = maksymalizacja zysku, to decyzja A

Jeżeli *kryterium* = minimalizacja okresu zwrotu*, to decyzja A lub C

* Okres zwrotu (roczny) = nakłady roczne / zysk roczny.

MODELOWANIE PROBLEMÓW DECYZYJNYCH, c.d.1

Opis określonej sytuacji decyzyjnej nazywamy problemem decyzyjnym (odpowiedź: *tak* lub *nie*).

Zapis problemu decyzyjnego w języku matematycznym to formułowanie modelu matematycznego.

Model matematyczny problemu decyzyjnego nazywamy zadaniem decyzyjnym (optymalizacyjnym).

Aby rozwiązanie zadania decyzyjnego umożliwiło wybór najlepszej decyzji, trzeba je tak sformułować, by dokładnie opisywało ono sytuację decyzyjną.

Należy ustalić:

ELEMENTY ZADANIA DECYZYJNEGO

1) **jakie wielkości są dane (określić tzw. parametry zadania);**
2) **jakie wielkości mają być wyznaczone i odpowiednio je oznaczyć (należy podać tzw. zmienne decyzyjne);**
3) **jakie warunki ograniczające musi spełnić dopuszczalna decyzja i sformułować je w postaci równań lub nierówności wiążących zmienne decyzyjne (zapisać tzw. warunki ograniczające);**
4) **cel, jaki chce osiągnąć decydent oraz sformułować funkcję zmiennych decyzyjnych określającą stopień osiągnięcia celu (podać tzw. funkcję celu).**

MODELOWANIE PROBLEMÓW DECYZYJNYCH, c.d.2

Zmienne decyzyjne – wielkości występujące w warunkach ograniczających i funkcji celu, które należy ustalić.

Parametry zadania – wielkości występujące w warunkach ograniczających i funkcji celu, których wartości są dane.

Warunki ograniczające – układy równań lub (i) nierówności, które ograniczają wybór decyzji.

Funkcja celu (kryterium) – pewna funkcja zmiennych decyzyjnych mierząca cel, który chce osiągnąć decydent.

Jeżeli przez D oznaczymy zbiór dopuszczalnych decyzji, przez x dowolną decyzję, a przez f – funkcję celu, to zadanie decyzyjne (optymalizacyjne) można zapisać następująco:

znaleźć taką decyzję dopuszczalną $x^* \in D$, że:

$$f(x^*) = \max\{ f(x) : x \in D \}$$ - gdy maksymalizacja celu

lub

$$f(x^*) = \min\{ f(x) : x \in D \}$$ - gdy minimalizacja celu

MODELOWANIE PROBLEMÓW DECYZYJNYCH, c.d.3

Oprócz warunków ograniczających w zadaniu decyzyjnym mogą także występować warunki dotyczące znaku zmiennych (np. warunek nieujemności) lub typu zmiennych (np. warunek ich ciągłości, całkowitoliczbowości lub binarności).

Typ I

Mówimy wtedy o zadaniu ciągłym, całkowitoliczbowym lub binarnym. Każde z tych zadań ma odrębną metodę rozwiązywania.

Typ II

Jeżeli w zadaniu decyzyjnym funkcja celu oraz warunki ograniczające są liniowe, to zadanie takie nazywamy liniowym zadaniem decyzyjnym (z.d.). Jeżeli przynajmniej jeden z warunków ograniczających jest nieliniowy (lub funkcja celu jest nieliniowa), to zadania takie nazywamy nieliniowym zadaniem decyzyjnym.

W praktyce, w zależności od typu zmiennych decyzyjnych (ciągłe, dyskretne) i charakteru warunków ograniczających oraz funkcji celu (liniowe, nieliniowe) mamy do czynienia z ciągłymi liniowymi z.d., dyskretnymi liniowymi z.d., dyskretnymi nieliniowymi z.d., itd.

PRZYKŁADY MODELOWANIA PROBLEMÓW DECYZYJNYCH

I. Ogólny model wyboru asortymentu produkcji

Opis problemu

Zakład (firma) może produkować *n* wyrobów. Do ich produkcji zużywane są różne środki produkcji, z których część (powiedzmy *r*) jest dostępna w ograniczonych ilościach. Dane są normy zużycia środków produkcji na jednostkę każdego wyrobu, zasoby środków produkcji, ceny lub zyski jednostkowe ze sprzedaży wyrobów.

Mogą być także podane dodatkowe informacje o popycie na produkowane wyroby (lub niektóre z nich) - minimalna ilość, jaką trzeba wyprodukować, aby zrealizować zamówienia odbiorców lub maksymalną ilość, jaką można sprzedać.

Należy określić, które wyroby i w jakich ilościach produkować, aby nie przekraczając posiadanych zasobów środków produkcji i ewentualnie spełniając pewne dodatkowe ograniczenia dotyczące struktury produkcji, zmaksymalizować przychód (lub zysk) z ich sprzedaży.

Model matematyczny problemu

Zgodnie ze schematem procesu modelowania matematycznego oraz elementami zadania decyzyjnego (folia „MODELOWANIE PROBLEMÓW DECYZYJNYCH, c.d.1”) należy wyodrębnić z opisu werbalnego problemu odpowiednie elementy.

PRZYKŁADY MODELOWANIA PROBLEMÓW DECYZYJNYCH, c.d.1

Parametry zadania:

a_{ij} – zużycie i-tego środka produkcji na wytworzenie jednostki j-tego wyrobu ($i = 1, ..., r$; $j = 1, ..., n$);

b_i – wielkość posiadanego zasobu i-tego środka produkcji, $i = 1, ..., r$;

c_j – cena lub zysk jednostkowy ze sprzedaży j-tego wyrobu, $j = 1, ...,n$;

d_j – minimalna ilość j-tego wyrobu do wyprodukowania, $j = 1, ..., n$;

g_j – maksymalna ilość j-tego wyrobu jaką można sprzedać, $j = 1, ..., n$;

Zmienne decyzyjne:

x_j – wielkość produkcji j-tego wyrobu, $j = 1, ..., n$.

Zadanie decyzyjne polega na tym, aby znaleźć takie $x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n$, że funkcja celu przyjmuje wartość maksymalną, tzn.:

funkcja celu

$$c_1 \cdot x^*_1 + c_2 \cdot x^*_2 + ... + c_n \cdot x^*_n = \max\, c_1 \cdot x_1 + ... + c_n \cdot x_n$$

przy ogr.

warunki ograniczające

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n \le b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} \cdot x_1 + a_{r2} \cdot x_2 + ... + a_{rn} \cdot x_n \le b_r \\ d_j \le x_j \le g_j \qquad \text{dla niektórych } j, \\ x_1, ... , x_n \ge 0 \end{cases}$$

PRZYKŁADY MODELOWANIA PROBLEMÓW DECYZYJNYCH, c.d.2

Biorąc pod uwagę konwencję zapisu zadania decyzyjnego przedstawioną na folii „Modelowanie problemów decyzyjnych, c.d.2", zadanie dotyczące rozpatrywanego problemu można zapisać jak następuje:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$f(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_n \cdot x_n$$

$$D = \Big\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R_+^n : a_{11} \cdot x_1 + ... + a_{1n}\, x_n \le b_1, ..., \; a_{r1}\, x_1 + ... + a_{rn}\, x_n \le b_r, \; \underset{j=1,...n}{\exists} \; d_j \le x_j \le g_j \Big\}$$

Znaleźć taką decyzję $x^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n) \in D$, że

$$f(x^*) = \max \big\{ f(x) \;:\; x \in D \big\}$$

PRZYKŁADY MODELOWANIA PROBLEMÓW DECYZYJNYCH, c.d.3

Przykład liczbowy

Przedsiębiorstwo produkuje dwa wyroby W_1 i W_2. W procesie produkcji tych wyrobów zużywa się wiele środków, spośród których dwa są limitowane. Limity te wynoszą: środek I – 96 tys. jednostek, środek II – 80 tys. jednostek. Nakłady limitowanych środków na jednostkę wyrobów W_1 i W_2 podano w tabeli.

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady	
	W_1	W_2
I	16	24
II	16	10

Wiadomo także, że zdolności produkcyjne jednego z wydziałów, stanowiącego wąskie gardło procesu produkcyjnego, nie pozwalają produkować więcej niż 3 tys. szt. wyrobów W_1 oraz 4 tys. szt. wyrobów W_2. Ponadto działająca w ramach przedsiębiorstwa komórka analizy rynku ustaliła optymalne proporcje produkcji, które kształtują się odpowiednio jak 3 : 2.

Cena sprzedaży (w zł) jednostki wyrobu W_1 wynosi 30, a wyrobu W_2 – 40.

Zbudować model matematyczny problemu oraz zapisać zadanie optymalizacyjne w celu maksymalizowania przychodów ze sprzedaży.

Przykłady liczbowy, c.d.

Rozwiązanie.

Biorąc pod uwagę oznaczenia przyjęte dla tego modelu oraz wartości liczbowe podane w opisie zadania, mamy:

$r = 2$ - liczba rodzajów środków produkcji;

$n = 2$ - liczba rodzajów produkowanych wyrobów;

$a_{11} = 16$, $a_{12} = 24$, $a_{21} = 16$, $a_{22} = 10$ – zużycie i – tego środka produkcji na wytworzenie j – tego wyrobu, $i = 1, 2$, $j = 1,2$;

$b_1 = 96$, $b_2 = 80$ – limity i-tych środków produkcji, $i = 1, 2$;

$d_1 = 0$, $d_2 = 0$ – minimalna ilość j – tego wyrobu do wyprodukowania, $j = 1,2$

$g_1 = 3$, $g_2 = 4$ – maksymalna ilość j – tego wyrobu do wyprodukowania ze względu na zdolności produkcyjne, $j = 1,2$

$c_1 = 30$, $c_2 = 40$ – cena sprzedaży j – tego wyrobu, $j = 1,2$

x_1, x_2 - ilość produkcji wyrobu W_1 i W_2

Zadanie optymalizacyjne:

Znaleźć takie x_1^*, x_2^*, że:

$$30\, x_1^* + 40\, x_2^* = \max\ 30\, x_1 + 40\, x_2$$

przy org.

$$16\, x_1 + 24\, x_2 \le 96$$
$$16\, x_1 + 10\, x_2 \le 80$$
$$0 \le x_1 \le 3$$
$$0 \le x_2 \le 4$$
$$x_2 = \frac{2}{3} x_1$$

UWAGI

Należy zauważyć, że:

- **ostatni warunek ograniczający wynika z proporcji produkcji jaka została podana w treści zadania;**
- **w zależności od charakteru produkcji możemy mieć tu do czynienia z <u>zadaniem liniowym ciągłym</u> lub <u>liniowym dyskretnym</u>.**
- **Jeżeli firma produkuje np. materiały płynne, to charakter zmiennych decyzyjnych x_1 i x_2 będzie ciągły (bo można np. produkować $x_1 = 3{,}2$ tony wyrobu (paliwa) typu 1 oraz $x_2 = 5{,}7$ tony wyrobu (paliwa) typu 2). W związku z tym mielibyśmy do czynienia z <u>liniowym zadaniem ciągłym</u>.**
- **Jeżeli z kolei firma produkuje jakieś wyroby, które przelicza się na sztuki (np. materace, lodówki, maszyny itp.), to charakter zmiennych decyzyjnych x_1 i x_2 będzie dyskretny (bo nie można produkować np. 1,5 lodówki czy 2,8 materaca) i będziemy mieli do czynienia z <u>liniowym zadaniem dyskretnym</u>.**

Liniowość tego konkretnego zadania wynika z faktu, że funkcja celu jest liniową funkcją zmiennych decyzyjnych.

Rozwiązując powyższe zadanie otrzymalibyśmy, że $x_1^* = 3$ tys. oraz $x_2^* = 2$ tys.

II. Model wyboru inwestycji

Opis problemu

Przedsiębiorstwo ma zamiar realizować projekt inwestycyjny jako jeden z wielu możliwych wariantów inwestycji. W zależności od stanu gospodarki (kondycji branży, w której działa przedsiębiorstwo; sytuacji ekonomicznej na świecie itp.) prognozuje się dla każdego wariantu inwestycji stopę zwrotu (zysku) z tej inwestycji. Z każdym stanem gospodarki związane jest pewne prawdopodobieństwo zrealizowanie się tego stanu w okresie trwania inwestycji.

Należy określić, który wariant inwestycji realizować, aby oczekiwana stopa zysku z inwestycji była jak największa (lub ryzyko inwestycji było jak najmniejsze).

Model matematyczny problemu

Parametry zadania:

J={1,...,m} – zbiór numerów wariantów inwestycyjnych;

m – liczba alternatywnych wariantów inwestycyjnych,

n – liczba możliwych stanów gospodarki,

p_i – prawdopodobieństwo i – tego stanu gospodarki, i = 1,n,

r_{ij} – i – ta możliwa stopa zwrotu (zysku) z j – tego wariantu inwestycji, i =1,n , j = 1,m.;

r_j – oczekiwana stopa zysku z j – tej inwestycji,

$$r_j = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot r_{ij}$$

v_j – wariancja stopy zwrotu j – tej inwestycji,

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} p_i (r_{ij} - r_j)^2$$

Zmienna decyzyjna:

$j \in J$

W zależności od preferencji decydenta (szefa przedsiębiorstwa) możemy zdefiniować następujące zadania decyzyjne:

I **spośród m wariantów inwestycji wybrać wariant o takim numerze j^* dla którego zachodzi.**

$$r_{j^*} = \max_{j \in J} r_j$$

II **spośród m wariantów inwestycji wybrać wariant o takim numerze j^*, dla którego zachodzi:**

$$v_{j^*} = \min_{j \in J} v_j$$

III **spośród m wariantów inwestycji wybrać wariant o takim numerze j^*, dla którego zachodzi**

$$r_{j^*} = \max_{j \in J} r_j$$

$$v_{j^*} = \min_{j \in J} v_j$$

Najciekawszym z tych zadań decyzyjnych jest zadanie III, które prowadzi do specjalnych metod wyboru decyzji związanych z wielokryterialnym podejmowaniem decyzji.

III. Model wyboru portfela akcji

Opis problemu

Inwestor na giełdzie ma do wyboru akcje m = 2 firm. Z akcją każdej firmy związana jest oczekiwana stopa zwrotu akcji oraz ryzyko inwestowania w akcje tej spółki mierzone np. za pomocą wariancji stopy zwrotu (lub odchylenia standardowego stopy zwrotu).
Inwestor chce zbudować portfel akcji, dla którego stopa zysku jest nie mniejsza od pewnej wartości, a ryzyko jest minimalne.

Model matematyczny problemu

Parametry zadania:

$m = 2$ - liczba typów akcji, z których budujemy portfel,
r_j - oczekiwana stopa zysku z j –tej akcji,
$s_j^2 = v_j$ - wariancja stopy zysku j – tej akcji;
ς_{ij} - współczynnik korelacji stóp zwrotu między i–tą i j–tą akcją

$$\varsigma_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k (r_{ki} - r_i)(r_{kj} - r_j)}{s_i \cdot s_j}$$

n - liczba możliwych stóp zwrotu akcji,
r^* - minimalna dopuszczalna stopa zysku z portfela

Zmienne decyzyjne:

$\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right\}$ **udział 1 – szej i 2 – giej akcji w portfelu**

Warunki ograniczające:

I $r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot x_2 \geq r^*$

II $x_1 + x_2 = 1$

Funkcja celu (ryzyko portfela):

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 \cdot s_1^2 + x_2^2 \cdot s_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \varsigma_{1,2}$$

Zadanie decyzyjne:

Znaleźć takie x^*_1, $x^*_{2,}$, że

$$f(x^*_1, x^*_2) = \min \quad f(x_1, x_2)$$

przy ogr.:

$$D = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{array}{l} r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot x_2 \geq r^* \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$