Ekonometria, cz. III

Wykład 3

Metoda simpleks rozwiązywania zadań programowania liniowego

Prowadzący: **dr inż. Zbigniew TARAPATA**

Dane kontaktowe:

e-mail: **Zbigniew.Tarapata@isi.wat.edu.pl**

WWW: **http://zbigniew.tarapata.akcja.pl**

tel. **(w ostateczności !!!) : 0-606-45-54-80**

POSTAĆ KANONICZNA ZADANIA PROGAMOWANIA LINIOWEGO - PRZYPOMNIENIE

Przypomnijmy : Postać kanoniczna zadania optymalizacji liniowej definiowana jest następująco:

Wyznaczyć x=(x_1, x_2, x_3,..., x_n) takie, aby

$$\min f(x) = \min\{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n\}$$

przy ograniczeniach:

n-zmiennych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \bullet\bullet\bullet \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m-ograniczeń

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0$$

POSTAĆ KANONICZNA ZADANIA PROGAMOWANIA LINIOWEGO - PRZYPOMNIENIE

W zapisie wektorowo-macierzowym otrzymamy następującą postać:

$$\min\langle c, x\rangle$$

$$A \cdot x = b \quad x \geq 0$$

gdzie: $c = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Przykład

Wyznaczyć $x=(x_1, x_2, x_3)$ takie, aby

$$\min\{f(x) = 2x_1 + 4x_2 - x_3\}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 10 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Mamy trzy zmienne decyzyjne, dwa ograniczenia (n=3, m=2), jednak postać ta jest postacią kanoniczną.

W tym przypadku na przykład $a_{11}=2$, $a_{13}=-4$, $a_{22}=-5$, $b_1=10$ itd.

Wszystkie zadania optymalizacji liniowej sprowadzić musimy przede wszystkim do postaci kanonicznej.

Sprowadzanie zadań optymalizacji liniowej do postaci kanonicznej

a) **Jeśli szukamy zmiennych maksymalizujących funkcję kryterium, to zamieniamy ją na przemnożoną przez (-1) i wtedy szukamy już zmiennych minimalizujących nową funkcję, tzn.** ***max f(x) = – min –f(x)*** **;**

b) **Jeśli mamy ograniczenie typu „≥”, to od lewej strony odejmujemy nową zmienną (tzw. „sztuczną”) i zamieniamy nierówność na równość; <u>współczynnik tej nowej zmiennej w funkcji kryterium wynosi 0 (zero);</u>**

c) **Jeśli mamy ograniczenie typu „≤”, to do lewej strony dodajemy nową zmienną (tzw. „sztuczną”) i zamieniamy nierówność na równość; <u>współczynnik tej nowej zmiennej w funkcji kryterium wynosi również 0 (zero).</u>**

Przykład (sprowadzanie zadania do postaci kanonicznej)

Załóżmy, że mamy zadanie optymalizacji postaci :

$$\max f(x) = \max\{x_1 + x_2\}$$

$$c = (1,1)$$

przy ograniczeniach:

$$2x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 + 2x_2 \ge 1$$

$$3x_1 + 4x_2 = 4$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd.)

Sprowadźmy zadanie do postaci kanonicznej.

Najpierw zamieniamy „max” na „min” mnożąc funkcję przez –1:

$$\max\{x_1 + x_2\} = -\min\{-x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4\}$$

Zmieniamy ograniczenia

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 = 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$c = (-1, -1, 0, 0)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

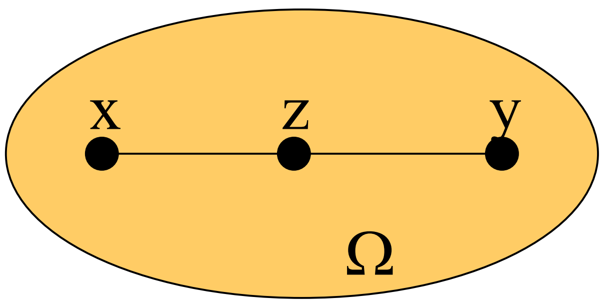
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Zapis wektorowo-macierzowy

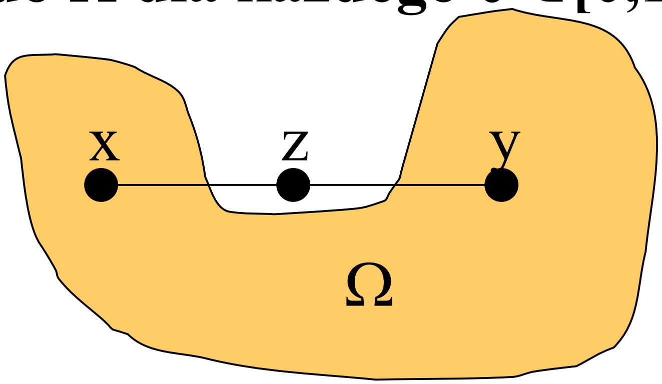
$$\begin{cases} \min\langle c, x\rangle \\ A \cdot x = b \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Definicja

Zbiór Ω nazywamy wypukłym jeśli dla każdych dwóch punktów $x,y \in \Omega$ punkt $z= \theta \cdot x+(1-\theta)y$ należy do Ω dla każdego $\theta \in [0,1]$.



Ω - zbiór wypukły



Ω - zbiór, który nie jest wypukły

Definicja

Hiperpłaszczyzną H_α w przestrzeni E^n nazywamy zbiór

$$H_\alpha = \left\{ x \in E^n : \langle a, x \rangle = \alpha, a \in E^n, \alpha \in R \right\}$$

gdzie <a,x> - iloczyn skalarny wektorów a oraz x.

Definicja

Hiperpłaszczyzna H_α generuje dwie półprzestrzenie domknięte

$$H_\alpha^- = \{x \in E^n : \langle a, x \rangle \le \alpha\} \qquad H_\alpha^+ = \{x \in E^n : \langle a, x \rangle \ge \alpha\}$$

Definicja

Zbiorem wielościennym (simpleksem) nazywamy zbiór Ω postaci

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in E^n : \langle a_i, x \rangle \le b_i\}$$

Definicja

Funkcja rzeczywista f określona na wypukłym zbiorze Ω nazywa się wypukłą, jeśli dla każdego $x, y \in \Omega$ oraz dla każdego $\theta \in [0,1]$ spełniona jest nierówność

$$f(\theta \cdot x + (1-\theta) \cdot y) \le \theta \cdot f(x) + (1-\theta) \cdot f(y)$$

Jeśli natomiast spełniona jest nierówność

$$f(\theta \cdot x + (1-\theta) \cdot y) \geq \theta \cdot f(x) + (1-\theta) \cdot f(y)$$

to funkcję f nazywamy wklęsłą.

Uwaga: funkcja liniowa f(x)=<a,x> jest jednocześnie wypukła i wklęsła.

Twierdzenie

Funkcja postaci

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x),\ \ \lambda_i \geq 0,\ \ i = 1,\ldots,m$$

jest wypukła, jeśli $f_i(x)$ są wypukłe, i=1,...,m.

Wniosek

Zbiór postaci

$$\Omega = \left\{x \in E^n : A \cdot x = b, x \geq 0\right\}$$

gdzie $A=[a_{ij}]_{mxn}$ jest wypukły.

Sformułujemy dwa zadania:

a. wyznaczyć $x^* \in \Omega \subset E^n$ takie, że

$$f(x^*) = \min_{x \in \Omega} f(x)$$

gdzie Ω - zbiór wypukły, f(•) – funkcja wypukła,

b. wyznaczyć $x^* \in \Omega \subset E^n$ takie, że

$$f(x^*) = \max_{x \in \Omega} f(x)$$

gdzie Ω - zbiór wypukły, f(•) – funkcja wklęsła,

Oba zadania nazywane są w literaturze *zadaniami wypukłymi*.

Dalej zajmować się będziemy rozwiązywaniem zadań wypukłych.

METODY ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ LINIOWYCH

Na wykładzie nr 2 poznaliśmy metodę geometryczną rozwiązywania zadań programowania liniowego. Metoda ta miała pewne ograniczenia:

- **może zostać zastosowana tylko do takich zadań, w których liczba zmiennych wynosi 2 (ewentualnie liczba ograniczeń wynosi 2 – wówczas możemy skonstruować zadanie dualne i rozwiązać je metodą graficzną);**
- **nie nadaje się ona do algorytmizacji i komputerowej implementacji (stosujemy wówczas najbardziej znaną metodę rozwiązywania zadań PL – tzw. algorytm simpleks);**
- **pozwala w prosty sposób zidentyfikować tzw. zadania ze sprzecznymi ograniczeniami oraz nieograniczoną wartością funkcji celu (o liczbie zmiennych równej 2).**

• Metodą, która nadaje się do automatyzacji (zatem można ją algorytmizować i wykorzystywać komputer) oraz którą można stosować przy wielu zmiennych i ograniczeniach jest metoda (algorytm) simpleks.

Twierdzenie (wykorzystywane przez algorytm simpleks)

Jeśli zadanie prymalne ma rozwiązanie optymalne $x^* \in \Omega$ to istnieje wierzchołek $\underline{x} \in \Omega$ zbioru Ω taki, że

$$\langle c, \underline{x} \rangle = \langle c, x^* \rangle = \min_{x \in \Omega} \langle c, x \rangle$$

przy czym Ω oznacza zbiór rozwiązań dopuszczalnych.

Zatem, jeśli zadanie liniowe ma rozwiązanie optymalne, to wystarczy przeglądać tylko wierzchołki zbioru Ω, aby znaleźć rozwiązanie będące minimum globalnym na zbiorze Ω.

Metody wyznaczania rozwiązań optymalnych zadań liniowych polegają na ogół na konstrukcji algorytmów przeglądu wierzchołków wielościanów wypukłych (simpleksów).

METODA SIMPLEKS - idea

- **Idea metody simpleks opiera się o przeglądanie wierzchołków zbioru ograniczeń według pewnej ustalonej reguły, tak, aby nie pominąć istotnych wierzchołków (w których może być rozwiązanie optymalne), a jednocześnie, aby nie przeglądać wszystkich wierzchołków, gdyż byłoby to zbyt czasochłonne;**

- **Ponieważ wierzchołkiem zbioru ograniczeń jest punkt, w którym przecinają się hiperpłaszczyzny (w szczególnym przypadku - proste), patrz slajd nr 9, więc metoda simpleks polega na rozwiązywaniu układu równań, który generowany jest przez ograniczenia;**

- **Jest to metoda krokowa (iteracyjna);**

- **W każdym kroku budowana jest tzw. tabela simpleksowa, na podstawie której wnioskujemy, czy otrzymane do tej pory rozwiązanie jest już optymalne, czy jeszcze nie;**

Ogólną postać tabeli simpleksowej przedstawiono na następnym slajdzie.

METODA SIMPLEKS – tablica metody simpleks

		c_i →	c_1	c_2	...	c_n
Zmienne bazowe	c_B	h_0	h_1	h_2	...	h_n
x_{B1}	c_{B1}	h_{10}	h_{11}	h_{12}	...	h_{1n}
x_{B2}	c_{B2}	h_{20}	h_{21}	h_{22}	...	h_{2n}
współczynniki →			w_1	w_2	...	w_n

Pogrubioną czerwoną linią zaznaczono ten fragment tabeli simpleksowej, który podlega wyliczaniu w każdym kroku algorytmu

współczynniki funkcji kryterium (np. przy tzw. zmiennych bazowych)

wartości aktualne zmiennych bazowych (w tym przypadku dwóch)

obliczane współczynniki h_{ij} (pierwotnie macierz A)

obliczane współczynniki $w_i : c_i - c_B \bullet h_i$

METODA SIMPLEKS – idea, c.d. – omówienie tabeli simpleksowej

- **W każdym kroku wyprowadza się zmienną z bazy i wprowadza się na jej miejsce nową; Warunki wejścia „nowej” zmiennej do bazy i wyjścia „starej” z bazy przedstawiono na slajdzie 21;**

- **Po dokonaniu operacji wprowadzania do bazy i wyprowadzania zmiennych z bazy dokonuje się ponownego przeliczenia wartości współczynników h_{ij} oraz w_i;**

- **Obliczanie wartości współczynników h_{ij} i w_i przedstawiono na slajdach 20 i 24;**

- **Warunkiem zakończenia obliczeń jest aby w ostatnim wierszu tabeli simpleksowej (współczynniki w_i) wartości wszystkich współczynników były większe lub równe zero;**

- **W ostatniej tabeli simpleksowej (rozwiązania optymalnego) zmienne bazowe, których wartości są równe wartościom w kolumnie h_0 stanowią rozwiązanie optymalne zadania;**

Przykład (wykorzystanie metody simpleks)

Załóżmy, że mamy zadanie optymalizacji postaci

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\max f(x) = \max\{x_1 + x_2\}$$

$$c = (1,1) \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

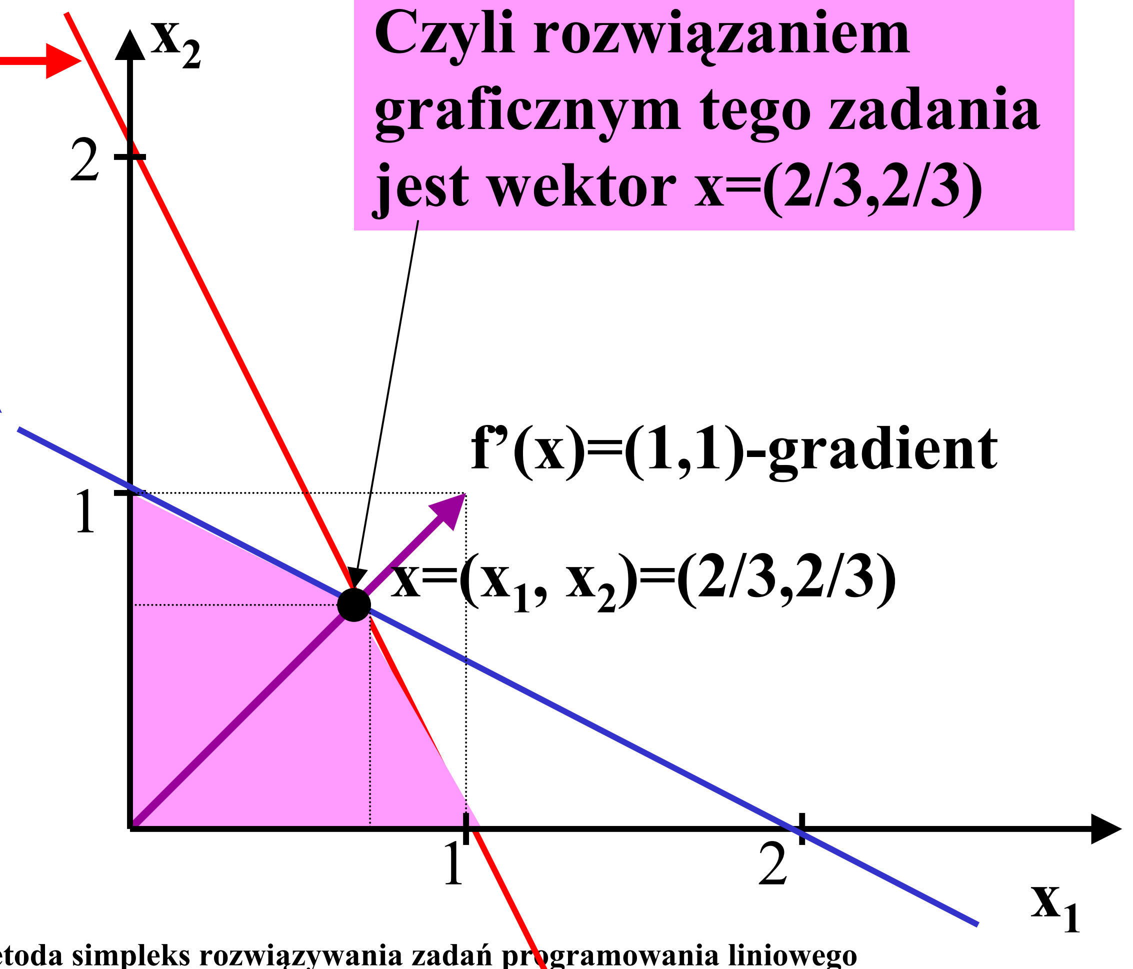
przy ograniczeniach:

$$2x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 + 2x_2 \le 2$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Czyli rozwiązaniem graficznym tego zadania jest wektor x=(2/3,2/3)



Gradient funkcji:

$$\frac{df(x)}{dx_1} = \frac{d(x_1 + x_2)}{dx_1} = 1$$

$$\frac{df(x)}{dx_2} = \frac{d(x_1 + x_2)}{dx_2} = 1$$

Przykład (cd.)

Sprowadźmy zadanie do postaci kanonicznej.

Najpierw zamieniamy „max" na „min" mnożąc funkcje przez –1:

$$\max\{x_1 + x_2\} = -\min\{-x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4\}$$

Zmieniamy ograniczenia

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$c = (-1,-1,0,0)$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \underbrace{1 & 0}_{} \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sugestia rozwiązania bazowego

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Zapis wektorowo-macierzowy

$$\begin{cases} \min\langle c, x\rangle \\ A\cdot x = b \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Przykład (cd.)

Szukamy pierwszego rozwiązania „bazowego”, tzn. takiego, które spełnia układ równań, ale niekoniecznie jest optymalnym.

Dla nas takim rozwiązaniem jest wektor x=(0,0,2,2)

$$2x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 2$$

$$x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 2$$

pierwsze zmienne bazowe

Łatwo zauważyć, że

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \underbrace{x_3 = 2,\ x_4 = 2}$$

jest rozwiązaniem dopuszczalnym, więc bazowym.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sugestia rozwiązania bazowego

Przykład (cd.) (Metoda simpleks – pierwsza tablica metody simpleks)

Tabela 1

Zmienne bazowe	c_B	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4
c_i →			-1	-1	0	0
x_3	0	2	2	1	1	0
x_4	0	2	1	2	0	1
współczynniki →			-1	-1	0	0

- (niebieski) współczynniki funkcji kryterium (np. przy zmiennych bazowych)
- (zielony) wartości aktualne zmiennych bazowych
- (różowy) współczynniki h_{ij} (w Tabeli 1 zawsze macierz A)
- (pomarańczowy) obliczane współczynniki $w_i : c_i - c_B \bullet h_i$, np.

iloczyn wektorów

$$w_1 = c_1 - (c_3 \cdot h_{11} + c_4 \cdot h_{21}) = -1 - (0 \cdot 2 + 0 \cdot 1) = -1$$

$$w_4 = c_4 - (c_3 \cdot h_{14} + c_4 \cdot h_{24}) = 0 - (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = 0$$

Przykład (cd.) (Metoda simpleks – tablica metody simpleks (cd.))

Tabela 1

	c_i		-1	-1	0	0	
Zmienne bazowe	c_B	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	
x_3	0	2	2	1	1	0	$h_{10}/h_{12}=2/1=2$
x_4	0	2	1	2	0	1	$h_{20}/h_{22}=2/2=1$ min
Współczynniki w_i			-1	-1 min	0	0	

Warunek wejścia do bazy (nowej zmiennej): **min{współczynnika w_i}**

(mógł być też pierwszy, wybieramy z równych „według woli”).

Kolumna (h_2) teraz jest dla nas podstawą wyjścia zmiennej bazowej z bazy, a numer zmiennej wchodzącej do bazy oznaczmy jako $L=2$.

Warunek wyjścia z bazy (starej zmiennej bazowej): dzielimy h_{i0}/h_{iL} (tylko dla $h_{iL}>0$) w każdym i-tym wierszu i szukamy wartości minimalnej.

Tabela 1

		c_i	-1	-1	0	0
Zmienne bazowe	c_B	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4
x_3	0	2	2	1	1	0
x_4	0	2	1	$\boxed{2}$	0	1
współczynniki			-1	-1	0	0

„Stara" tabela: w_i są ujemne, zatem jeszcze nie mamy rozwiązania optymalnego

zamiana

Tabela 2

		c_i	-1	-1	0	0
Zmienne bazowe	c_B	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4
x_3	0	1	3/2	0	1	-1/2
x_2	-1	1	1/2	1	0	1/2
współczynniki			-1/2	0	0	1/2

„Nowa" tabela: Nadal istnieją ujemne w_i , zatem nadal nie mamy rozwiązania optymalnego

Jak wyznaczyliśmy nowe współczynniki tabeli simpleks nr 2?

Tabela 1

		c_i	-1	-1	0	0
Zmienne bazowe	c_B	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4
x_3	0	2	2	1	1	0
x_4	0	2	1	$\boxed{2}$	0	1
współczynniki			-1	-1	0	0

W tym wierszu (odpowiadającym zmiennej <u>wyprowadzanej z bazy</u>) wszystkie komórki (bez niebieskich) dzielimy przez wartość pola czerwonego (w czarnej obwódce)

Wszystkie komórki (bez niebieskich) innych wierszy obliczamy następująco: np. nowe $h_{11}= h_{11}-(h_{12}\cdot h_{21}/ h_{22}) = 2-(1 \cdot 1/2) = 3/2$, ogólnie:

$$nowe \quad h_{ij} = h_{ij} - (h_{iL} \cdot h_{Kj} / h_{KL})$$

gdzie *K* – numer wiersza w tabeli, w którym znajduje się zmienna wyprowadzana z bazy; *L* – numer zmiennej (kolumny) wprowadzanej do bazy.

obliczane współczynniki w_i: $c_i - c_B \bullet h_i$

Szczegółowe obliczenia dla tabeli nr 2

Współczynniki h_{2j}:

nowe $h_{20} = h_{20} / h_{22} = 2/2 = 1$

nowe $h_{21} = h_{21} / h_{22} = 1/2 = 1/2$

nowe $h_{22} = h_{22} / h_{22} = 2/2 = 1$

nowe $h_{23} = h_{23} / h_{22} = 0/2 = 0$

nowe $h_{24} = h_{24} / h_{22} = 1/2 = 1/2$

Współczynniki h_{1j}:

nowe $h_{10} = h_{10} - (h_{12}\, h_{20} / h_{22}) = 2-(1\cdot 2/2) = 1$

nowe $h_{11} = h_{11} - (h_{12}\, h_{21} / h_{22}) = 2-(1\cdot 1/2) = 3/2$

nowe $h_{12} = h_{12} - (h_{12}\, h_{22} / h_{22}) = 1-(1\cdot 2/2) = 0$

nowe $h_{13} = h_{13} - (h_{12}\, h_{23} / h_{22}) = 1-(1\cdot 0/2) = 1$

nowe $h_{14} = h_{14} - (h_{12}\, h_{24} / h_{22}) = 0-(1\cdot 1/2) = -1/2$

Współczynniki $w_i = c_i - c_B \bullet h_i$:

$$w_1 = c_1 - (c_3 \cdot h_{11} + c_2 \cdot h_{21}) =$$
$$= -1 - (0 \cdot 3/2 + (-1) \cdot 1/2) = -1/2$$

$$w_4 = c_4 - (c_3 \cdot h_{14} + c_2 \cdot h_{24}) =$$
$$= 0 - (0 \cdot (-1/2) + (-1) \cdot 1/2) = 1/2$$

$$w_2 = c_2 - (c_3 \cdot h_{12} + c_2 \cdot h_{22}) =$$
$$= -1 - (0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1) = 0$$

$$w_3 = c_3 - (c_3 \cdot h_{13} + c_2 \cdot h_{23}) =$$
$$= 0 - (0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0) = 0$$

ZAWSZE wyliczane na podstawie „nowej” tabeli (czyli w tym kroku na podstawie tabeli nr 2)

ZAWSZE wyliczane na podstawie „starej” tabeli (czyli w tym kroku na podstawie tabeli nr 1)

Tabela 2

		c_i →	-1	-1	0	0
Zmienne bazowe	c_B	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4
x_3	0	1	$\boxed{3/2}$	0	1	-1/2
x_2	-1	1	1/2	1	0	1/2
współczynniki →			-1/2	0	0	1/2

Nadal istnieją ujemne w_i, zatem nadal nie mamy rozwiązania optymalnego

Tabela 3

		c_i →	-1	-1	0	0
Zmienne bazowe	c_B	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4
x_1	-1	2/3	1	0	2/3	-1/3
x_2	-1	2/3	0	1	-1/3	2/3
współczynniki →			0	0	1/3	1/3

Istnieją jedynie dodatnie w_i, zatem **mamy rozwiązanie optymalne**

W ostatniej tabeli otrzymaliśmy:

$x=(x_1, x_2, x_3, x_4)=(2/3, 2/3, 0, 0)$

zatem szukane przez nas rozwiązanie bez zmiennych sztucznych:

$x=(x_1, x_2)=(2/3, 2/3)$

natomiast wartość funkcji kryterium $f(x)= x_1+x_2=2/3 + 2/3=4/3$.

Otrzymaliśmy to samo rozwiązanie co metodą graficzną (slajd 16).