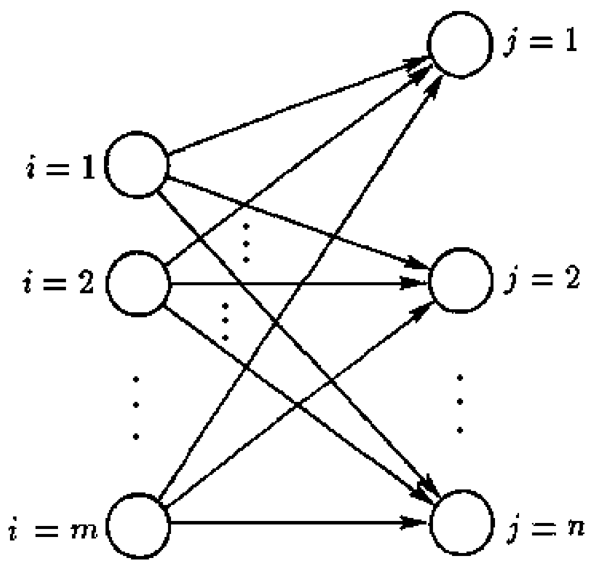
ZAGADNIENIE TRANSPORTOWE

ZT jest specyficznym problemem z zakresu zastosowań programowania liniowego.
ZT wykorzystuje się najczęściej do:

- **optymalnego planowania transportu towarów, przy minimalizacji kosztów, lub czasu wykonania zadania;**
- **optymalnego rozdziału czynników produkcji, w celu maksymalizacji wartości produkcji, zysku, lub dochodu np. rolniczego.**

Zagadnienie transportowe ma prostą interpretację sieciową. Przypuśćmy, że mamy *sieć skierowaną* (zwaną także *diagramem ważonym),* określoną za pomocą zbioru wierzchołków V i zbioru łuków (tj. skierowanych łuków) E (zob. Rys. 1). W zagadnieniu transportowym sieć jest *dwudzielna i pełna*, tzn. wszystkie jej wierzchołki można podzielić na dwie grupy, na *węzły dostawy* ponumerowane i=1,2,...,m i *węzły odbioru* ponumerowane j=1,2,...,n, każdy wierzchołek dostawy ma n łuków wychodzących z niego do wszystkich wierzchołków odbioru. Dla każdego łuku jest określony jednostkowy koszt c_{ij} transportowanego dobra.

Zagadnienie polega na wyznaczeniu takich wielkości przewozu x_{ij}, które minimalizują całkowity koszt transportu z.



Rys.1

Zagadnienie transportowe definiujemy następująco:

znaleźć minimum

(1.1) $$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

przy warunkach

(1.2) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \qquad i = 1, 2, ..., m,$$

(1.3) $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \qquad j = 1, 2, ..., n,$$

$$x_{ij} \ge 0, \qquad i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Pierwszych *m* nierówności odnosi się do wierzchołków dostawy (podaż), następne *n* nierówności odnosi się do wierzchołków odbioru (popyt). Elementy a_i oznaczają podaż *i*-tego dostawcy, a elementy b_j - popyt (zapotrzebowanie) *j*-tego odbiorcy.

Zagadnienie można rozwiązywać metodą simpleks, jednak jest ona w tym przypadku mało efektywna. Najczęściej stosuje się metodę kąta północno-zachodniego. Służy ona do znalezienia pierwszego rozwiązania bazowego.

Zagadnienie transportowe ma rozwiązanie dopuszczalne, gdy

(1.4) $$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

a ograniczenia odbioru stają się równościami dla rozwiązania optymalnego, tj.

(1.5) $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

dla wszystkich j.

Ponadto, jeśli

(1.6) $$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

to każde rozwiązanie dopuszczalne spełnia wszystkie nierówności jako równości.

Bez utraty ogólności można przyjąć, że (1.2) i (1.3) są równościami, ponieważ zawsze *<u>możemy wprowadzić fikcyjny wierzchołek</u>* odbioru $n+1$, o wartości odbioru równej

(1.7) $$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

i kosztami $c_{i,n+1} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Postępowanie to nazywamy *<u>bilansowaniem zagadnienia transportowego</u>*.

Przykład

Pewna firma ma zakłady wytwórcze w miejscowościach A, B, C oraz centra dystrybucyjnie w miejscowościach D, E, F. Możliwości produkcyjne zakładów wynoszą odpowiednio 50, 70 i 30 jednostek, natomiast prognozy popytu w centrach - odpowiednio 20, 40 i 90 jednostek. Należy określić taki plan przewozów, by przy uwzględnieniu możliwości produkcyjnych zakładów oraz przewidywanego popytu w centrach dystrybucyjnych zminimalizować łączne koszty transportu (które są proporcjonalne do ilości przewożonego towaru).
Jednostkowe koszty transportu przedstawione są w tabeli:

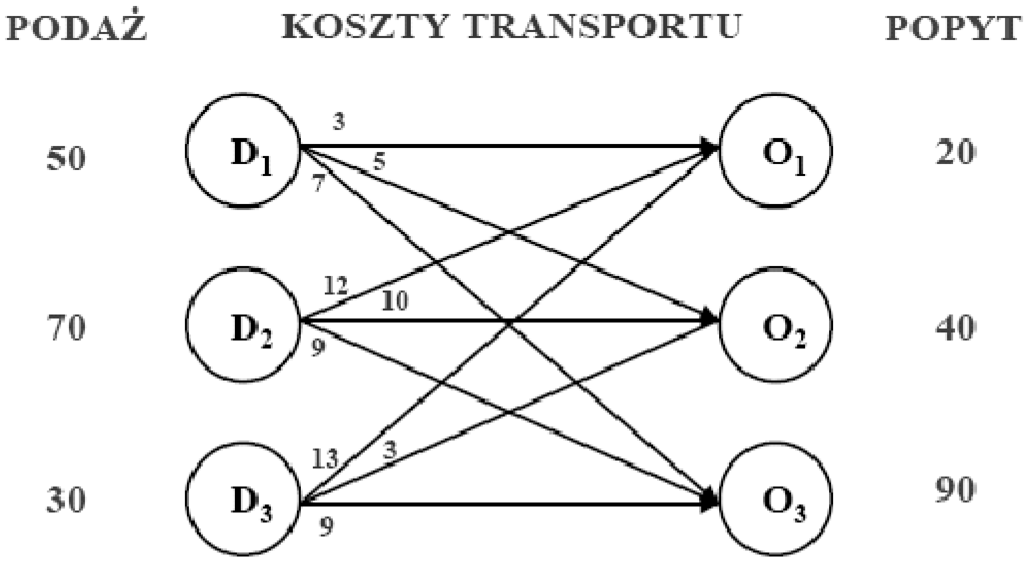
Miejscowość	*D*	*E*	*F*
A	3	5	7
B	12	10	9
C	13	3	9

Opis oznaczeń:
Dostawcy: D_1, D_2, D_3 - zakłady produkcyjne w miejscowościach A, B, C
Odbiorcy: O_1, O_2, O_3 - centra dystrybucyjne w miejscowościach D, E, F

Określenie popytu i podaży:
Podaż: 50 + 30 + 70= 150
Popyt: 20 + 40 + 90 = 150

Zadanie jest zbilansowane, ponieważ: POPYT = PODAŻ.

Sieć skierowana dla tego problemu:



Celem jest minimalizacja kosztów transportu.

MATEMATYCZNE SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA TRANSPORTOWEGO

Wprowadzamy oznaczenia:
x_{ij} - wielkość przewozu od *i*-tego dostawcy do *j*-tego odbiorcy;

Koszty transportu (funkcja celu):

$$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) =$$
$$= 3x_{11}+5x_{12}+7x_{13}+12x_{21}+10x_{22}+9x_{23}+13x_{31}+3x_{32}+9x_{33} \quad \text{-->}\ \min$$

Ograniczenia podaży:

1. **Ilość towaru wysyłanego przez dostawcę D_1 odbiorcom O_1, O_2, O_3 jest równa podaży dla tego dostawcy i wynosi 50:**

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50$$

2. **Ilość towaru wysyłanego przez dostawcę D_2 odbiorcom O_1, O_2, O_3 jest równa podaży dla tego dostawcy i wynosi 70:**

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70$$

3. **Ilość towaru wysyłanego przez dostawcę D_3 odbiorcom O_1, O_2, O_3 jest równa podaży dla tego dostawcy i wynosi 30:**

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 30 \qquad \text{oraz} \quad x_{ij} \geq 0$$

Ograniczenia popytu :

1. **Ilość towaru otrzymana przez odbiorcę O_1 od dostawców D_1, D_2, D_3 jest równa popytowi dla tego odbiorcy i wynosi 20:**

$$x_{11}+x_{21}+x_{31} = 20$$

2. **Ilość towaru otrzymana przez odbiorcę O_2 od dostawców D_1, D_2, D_3 jest równa popytowi dla tego odbiorcy i wynosi 40:**

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40$$

3. **Ilość towaru otrzymana przez odbiorcę O_3 od dostawców D_1, D_2, D_3 jest równa popytowi dla tego odbiorcy i wynosi 90:**

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 90$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Sformułowanie matematyczne:

$$Z = 3x_{11}+5x_{12}+7x_{13}+12x_{21}+10x_{22}+9x_{23}+13x_{31}+3x_{32}+9x_{33} \quad \text{-->} \min$$

Ograniczenia:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} = 50$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 30$$

$$x_{11} +x_{21} +x_{31} = 20$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 90$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Zapis macierzowy:

$$c^T \bullet x \longrightarrow \min$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

przy czym

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 12 \\ 10 \\ 9 \\ 13 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 30 \\ 20 \\ 40 \\ 90 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zagadnienie transportowe jest szczególnym przypadkiem zadania optymalizacji liniowej.

Macierz A zawiera jedynie elementy 0 i 1, tylko dwa elementy w każdej z kolumn są niezerowe.

POSZUKIWANIE PIERWSZEGO DOPUSZCZALNEGO ROZWIĄZANIA BAZOWEGO - METODA WIERZCHOŁKA PÓŁNOCNO-ZACHODNIEGO

Tab.1 Tabela przewozów:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	50	D_1
(2,1)	(2,2)	(2,3)	70	D_2
(3,1)	(3,2)	(3,3)	30	D_3
20	40	90		
O_1	O_2	O_3		

Pole (1,1) oznacza trasę od D_1 do O_1. Pole (1,2) oznacza trasę od D_1 do O_2, itd.

Ogólnie: pole (i,j) oznacza trasę od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy.

Wykorzystując metodę wierzchołka północno-zachodniego na początku określamy liczbę, tzw. węzłów bazowych: m + n - 1, gdzie *m* oznacza liczbę dostawców, a *n* - liczbę odbiorców. Zatem otrzymujemy: 3 + 3 - 1 = 5. Węzły bazowe oznaczają liczbę zmiennych: m + n - 1 oznacza, że jedna zmienna jest zbyteczna, co jest równoznaczne z pominięciem jednego z warunków ograniczających.

KROK 1

Patrząc na tabelę przewozów znajdujemy węzeł wysunięty najdalej na północny-zachód (Tab.2). Jest nim węzeł (1,1). Maksymalne możliwości wykorzystania trasy (1,1) określone są przez mniejszą z liczb opisujących podaż D_1 oraz popyt O_1: min (50,20) = 20. Liczba ta określa przewóz na rozpatrywanej trasie. Jednocześnie można stwierdzić, że zapotrzebowanie O_1 zostało w ten sposób zaspokojone, stąd też nie należy uwzględniać go w dalszych rozważaniach (węzły (2,1), (3,1) mają wartość 0) (Tab.3).

Tab.2

(1,1)	(1,2)	(1,3)	50	D_1
(2,1)	(2,2)	(2,3)	70	D_2
(3,1)	(3,2)	(3,3)	30	D_3
20	40	90		
O_1	O_2	O_3		

Tab.3

20			~~50~~ 30	D_1
0			70	D_2
0			30	D_3
~~20~~	40	90		
O_1	O_2	O_3		

KROK 2

Tab.4

(1,1)	(1,2)	(1,3)	30	D_1
(2,1)	(2,2)	(2,3)	70	D_2
(3,1)	(3,2)	(3,3)	30	D_3
0	40	90		
O_1	O_2	O_3		

Spośród niewypełnionych węzłów wybieramy ten, który jest najdalej wysunięty na północy-zachód, czyli (1,2) (Tab.4). Uwzględniając zmodyfikowaną wielkość podaży D_1 równą obecnie 30 (na początku była równa 50, ale 20 jednostek zaspokoiło zapotrzebowanie O_1) znajdujemy: min (30,40) = 30.

Tab.5

20	30	0	~~30~~ 0	D_1
0			70	D_2
0			30	D_3
0	~~40~~ 10	90		
O_1	O_2	O_3		

Na trasie od D_1 do O_2 należy zaplanować przewóz na poziomie 30 jednostek. Zatem podaż D_1 zostaje zredukowana do zera, co powoduje, że na trasie od tego dostawcy do pozostałych odbiorców należy wpisać zero (D_1 nie posiada już środków na zaspokojenie popytu pozostałych odbiorców) (Tab.5).

KROK 3

Brakujące 10 jednostek u O_2 zaspokaja D_2, redukując swoją podaż do 60.

Tab.6

20	30	0	0	D_1
0	10		~~70~~ 60	D_2
0	0		30	D_3
0	~~10~~ 0	90		
O_1	O_2	O_3		

KROK 4

Tab.7

20	30	0	0	D_1
0	10	60	~~60~~ 0	D_2
0	0		30	D_3
0	0	~~90~~ 30		
O_1	O_2	O_3		

KROK 5

Tab.8 (Pierwsze rozwiązanie bazowe)

20	30	0	0	D_1
0	10	60	~~60~~ 0	D_2
0	0	30	~~30~~ 0	D_3
0	0	~~30~~		
		0		
O_1	O_2	O_3		

Mając wypełnioną tabelę przewozów, otrzymaliśmy rozwiązanie dopuszczalne (tzn. spełniające wszystkie ograniczenia):

$$\begin{array}{lll} x_{11} = 20 & x_{12} = 30 & x_{13} = 0 \\ x_{21} = 0 & x_{22} = 10 & x_{23} = 60 \\ x_{31} = 0 & x_{32} = 0 & x_{33} = 30 \end{array}$$

<u>Nie wiadomo jeszcze, czy jest to rozwiązanie optymalne.</u>

Wartość funkcji celu dla tego rozwiązania (koszty transportu) wynosi:

$$Z = 3x_{11}+5x_{12}+7x_{13}+12x_{21}+10x_{22}+9x_{23}+13x_{31}+3x_{32}+9x_{33} =$$

$$= 3\cdot 20 + 5\cdot 30 + 7\cdot 0 + 12\cdot 0 + 10\cdot 10 + 9\cdot 60 + 13\cdot 0 + 3\cdot 0 + 9\cdot 30 = 1120$$

POSZUKIWANIE ROZWIĄZANIA OPTYMALNEGO

W pierwszym rozwiązaniu bazowym, które otrzymaliśmy w Tab.8, węzłami bazowymi są węzły zaznaczone „*" w poniższej tabeli:

Tab.9

(1,1)*	(1,2)*		D_1
	(2,2)*	(2,3)*	D_2
		(3,3)*	D_3
O_1	O_2	O_3	

W celu znalezienia rozwiązania optymalnego będziemy posługiwali się pewnymi wskaźnikami, które zostaną zdefiniowane jako wskaźniki optymalności.

<u>Wprowadzamy zmienne:</u>
u_i - zmienna odpowiadająca *i*-temu dostawcy;
v_j - zmienna odpowiadająca *j*-temu odbiorcy.

Definiujemy wskaźniki optymalności:

$$e_{ij} = u_i + v_j + c_{ij}$$

Dla węzłów bazowych zakładamy, że:

$$e_{ij} = u_i + v_j + c_{ij} = 0$$

Stąd otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} e_{11} = u_1 + v_1 + 3 = 0 & \text{dla węzła } (1,1) \\ e_{12} = u_1 + v_2 + 5 = 0 & \text{dla węzła } (1,2) \\ e_{22} = u_2 + v_2 + 10 = 0 & \text{dla węzła } (2,2) \\ e_{23} = u_2 + v_3 + 9 = 0 & \text{dla węzła } (2,3) \\ e_{33} = u_3 + v_3 + 9 = 0 & \text{dla węzła } (3,3) \end{cases}$$

W powyższym układzie równań mamy 6 niewiadomych i 5 równań. Można wykazać, że układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań. Jeśli chcemy znaleźć jedno z nich, to za jedną zmienną przyjmujemy dowolną wartość: np. $u_1 = 0$.
Wówczas:

$$u_1 = 0 \qquad v_1 = -3$$
$$u_2 = -5 \qquad v_2 = -5$$
$$u_3 = -5 \qquad v_3 = -4$$

Dla węzłów niebazowych obliczamy:

$$e_{ij} = u_i + v_j + c_{ij}$$

stąd

$$e_{13} = u_1 + v_3 + 7 = 3$$
$$e_{21} = u_2 + v_1 + 12 = 4$$
$$e_{31} = u_3 + v_1 + 13 = 5$$
$$e_{32} = u_3 + v_2 + 3 = -7$$

Otrzymujemy więc tabelę kosztów c_{ij} z oznaczonymi wartościami zmiennych u_i oraz v_j:

Tab.10

				u_i
	3*	5*	7	0
	12	10*	9*	-5
	13	3	9*	-5
v_j	-3	-5	-4	

Wyniki (wskaźniki optymalności) umieszczamy w tablicy 11:

Tab.11 ***(Tabela wskaźników optymalności)***

0*	0*	3
4	0*	0*
5	-7	0*

Kryterium optymalności: **rozwiązanie jest optymalne, jeżeli wartości wszystkich wskaźników w tabeli wskaźników optymalności (Tab.11) są nieujemne. Zatem otrzymane rozwiązanie nie jest optymalne.**

Kryterium wejścia: **w tabeli wskaźników optymalności znajdujemy najmniejszy element. Odpowiadający mu węzeł wprowadzamy do bazy (element (3,2) w Tab.11).**

Określenie węzła usuwanego z bazy (Tab.8) następuje poprzez budowę tzw. cyklu. Cykl jest to taki zbiór węzłów, że w każdej linii (wierszu lub kolumnie) znajduje się 0 lub 2 węzły tego zbioru. Cykl składa się z półcyklu dodatniego i ujemnego.
Budując cykl, zaczynamy zawsze od węzła odpowiadającego najmniejszemu wskaźnikowi optymalności (u nas węzeł (3,2) w Tab.11) i budujemy do tego pola cykl, nadając każdemu polu numer będący kolejną liczbą naturalną. Te pola cyklu, które mają *numery nieparzyste tworzą półcykl dodatni*, a te, które *mają numery parzyste – półcykl ujemny* (Tab.12). W tej sytuacji otrzymaliśmy cykl: (3,2)-(2,2)-(2,3)-(3,3), w skład którego wchodzi półcykl dodatni (3,2)-(2,3) i półcykl ujemny: (2,2)-(3,3).

Tab.12

20*	30*	0
0	10* -	60* +
0	0 +	30* -

Tab.12 (powtórzona z poprzedniej strony)

20*	30*	0
0	10* -	60* +
0	0 +	30* -

Kryterium wyjścia: **z bazy usuwana jest ta zmienna, dla której *wartość przewozu w półcyklu ujemnym jest najmniejsza.* W Tab.12 wartość minimalna występuje dla węzła (2,2) i jest równa 10. Od węzłów oznaczonych „-” odejmujemy tą wartość, a do węzłów oznaczonych „+” dodajemy tą wartość:**
Tab.13

20*	30*	0
0	0 -	70* +
0	10* +	20* -

Po korekcie węzłami bazowymi są:
Tab.14 *(Drugie rozwiązanie bazowe)*

(1,1)*	(1,2)*	
		(2,3)*
	(3,2)*	(3,3)*

Wskaźniki optymalności z poprzedniego kroku wynoszą:
Tab.15 (patrz Tab.11)

0*	0*	3
4	0	0*
5	-7*	0*

Ponownie wyliczamy nowe wskaźniki optymalności oraz przeprowadzamy procedurę wprowadzania węzła do i wyprowadzania z bazy (opisaną na str. 13-16).

Dla zmiennych bazowych wskaźniki optymalności są równe zero, czyli:

$$\begin{cases} e_{11} = u_1 + v_1 = 0 \\ e_{12} = u_1 + v_2 = 0 \\ e_{23} = u_2 + v_3 = 0 \\ e_{32} = u_3 + v_2 - 7 = 0 \\ e_{33} = u_3 + v_3 = 0 \end{cases}$$

Podstawiamy $u_1 = 0$ i otrzymujemy:

$$\begin{array}{ll} u_1 = 0 & v_1 = 0 \\ u_2 = 7 & v_2 = 0 \\ u_3 = 7 & v_3 = -7 \end{array}$$

Dla węzłów niebazowych obliczamy:

$$e_{ij} = u_i + v_j + c_{ij}$$

stąd

$$\begin{aligned} e_{13} &= u_1 + v_3 + 3 = -4 \\ e_{21} &= u_2 + v_1 + 4 = 11 \\ e_{22} &= u_2 + v_2 + 0 = 7 \\ e_{31} &= u_3 + v_1 + 5 = 12 \end{aligned}$$

Wskaźniki optymalności (stare):

Tab.16 (patrz Tab.15)

				u_i
	0*	0*	3	0
	4	0	0*	7
	5	-7*	0*	7
v_j	0	0	-7	

Nowe wskaźniki optymalności:
Tab.17

0*	0*	-4
11	7	0*
12	0*	0*

Wartość wskaźnika optymalności jest ujemna dla zmiennej x_{13}, zmienną tą wprowadzimy zatem do nowej bazy. Rozpatrujemy trasę (1,3) odpowiadającą ujemnemu wskaźnikowi optymalności:

Tab.18 ***(patrz Tab.13)***

20*	30* -	0
0	0	70*
0	10* +	20* -

W tym węźle możemy maksymalnie przyjąć 20 korygując pozostałe trasy, czyli:

Tab.19 ***(Trzecie rozwiązanie bazowe)***

20*	10* -	20* +
0	0	70*
0	30* +	0 -

Po tej korekcie węzłami bazowymi są:
Tab.20

(1,1)*	(1,2)*	(1,3)*
		(2,3)*
	(3,2)*	

Wskaźniki optymalności z poprzedniego kroku wynoszą:
Tab.21 ***(patrz Tab.17)***

0*	0*	-4*
11	7	0*
12	0*	0

<u>Ponownie wyliczamy nowe wskaźniki optymalności oraz przeprowadzamy procedurę wprowadzania węzła do i wyprowadzania z bazy (opisaną na str. 13-16).</u>
Dla zmiennych bazowych wskaźniki optymalności są równe zero, czyli:

$$\begin{cases} e_{11} = u_1 + v_1 = 0 \\ e_{12} = u_1 + v_2 = 0 \\ e_{13} = u_1 + v_3 - 4 = 0 \\ e_{23} = u_2 + v_3 = 0 \\ e_{32} = u_3 + v_2 = 0 \end{cases}$$

Podstawiamy $u_1 = 0$ i otrzymujemy:

$$\begin{array}{ll} u_1 = 0 & v_1 = 0 \\ u_2 = -4 & v_2 = 0 \\ u_3 = 0 & v_3 = 4 \end{array}$$

Wskaźniki optymalności (stare):
Tab.22 ***(patrz Tab.21)***

				u_i
	0*	0*	-4*	0
	11	7	0*	-4
	12	0*	0	0
v_j	0	0	4	

Nowe wskaźniki optymalności:
Tab.23

0*	0*	0*
7	3	0*
12	0*	4

Ponieważ wszystkie wskaźniki optymalności są nieujemne, więc ostatnio otrzymane rozwiązanie bazowe jest optymalne (Tab.19).

Optymalnym rozwiązaniem jest zatem:
Tab.24

20*	10*	20*
0	0	70*
0	30*	0

czyli:

$x_{11} = 20$ $x_{12} = 10$ $x_{13} = 20$
$x_{21} = 0$ $x_{22} = 0$ $x_{23} = 70$
$x_{31} = 0$ $x_{32} = 30$ $x_{33} = 0$

oraz wartość funkcji celu dla tego rozwiązania (koszty transportu) wynosi:

$$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) =$$
$$= 3\cdot x_{11} + 5\cdot x_{12} + 7\cdot x_{13} + 12\cdot x_{21} + 10\cdot x_{22} + 9\cdot x_{23} + 13\cdot x_{31} + 3\cdot x_{32} + 9\cdot x_{33} =$$
$$= 3\cdot 20 + 5\cdot 10 + 7\cdot 20 + 12\cdot 0 + 10\cdot 0 + 9\cdot 70 + 13\cdot 0 + 3\cdot 30 + 9\cdot 0 = 970$$