5. OPTYMALIZACJA NIELINIOWA

Zdarza się dość często, że zależności występujące w analizowanych procesach (np. gospodarczych) mają charakter nieliniowy. Dlatego też, oprócz liniowych zadań decyzyjnych, formułujemy także nieliniowe zadania decyzyjne (NZD).

Zadanie decyzyjne nazywamy nieliniowym, jeżeli funkcja celu lub chociaż jeden z warunków ograniczających są nieliniowe (np. kwadratowe, wykładnicze, logarytmiczne, itp.).

Przykład praktycznego zagadnienia o charakterze nieliniowym (zagadnienie wyboru optymalnego portfela akcji)

Stopa zysku i ryzyko

Rozważmy następujący problem decyzyjny.
Inwestor posiadający określony kapitał chce go ulokować na giełdzie kupując akcje. Każda akcja jest charakteryzowana przez dwa podstawowe czynniki, istotne dla inwestora podejmującego decyzje o zakupie akcji: stopę zysku (zwrotu) i ryzyko.

Stopa zysku (zwrotu) to stosunek zysku, jaki przynosi dana akcja, do kosztu jej zakupu. Stopę zysku w okresie *t* obliczamy według wzoru:

(4.1) $$R_t = \left[\left(P_t - P_{t-1}\right) + D_t\right] / P_{t-1},$$

gdzie:
P_t – wartość akcji na koniec okresu *t*,
P_{t-1} – wartość akcji na początku okresu *t*,
D_t – wielkość dywidendy[1] w okresie *t*.

[1] Uwaga! Dla dziennych stóp zwrotu przyjmujemy najczęściej, że dywidenda jest równa zero. Czasami stopę zwrotu definiuje się również pomijając składnik D_t.

Wszystkie decyzje związane z inwestowaniem w akcje są decyzjami dotyczącymi przyszłości, podejmowanymi w warunkach niepewności. Tak więc, stopa zysku jest w istocie przyszłą, oczekiwana stopą zysku, jaka zostanie osiągnięta w pewnym okresie. Stąd uzyskanie ustalonej wartości stopy zysku wiąże się z ryzykiem.

Stopa zysku jest zmienną losową, która może przyjmować różne wartości z określonymi prawdopodobieństwami. Prawdopodobieństwa te zależą od sytuacji na giełdzie, a te z kolei od różnych czynników, np. od stanu gospodarki czy sytuacji politycznej.

Przykład 4.1

Rozważmy akcje dwóch spółek A i B. W Tabeli 4.1 przedstawiono rozkłady stóp zwrotu tych akcji.

Tabela 4.1

Możliwy stan gospodarki i	Prawdopodobieństwo p_i	Stopa zwrotu	
		R_{iA} (w %)	R_{iB} (w %)
1	0.1	60	20
2	0.2	30	14
3	0.4	10	10
4	0.2	-10	6
5	0.1	-40	0

Powstaje pytanie: jak na podstawie tych przewidywanych stóp zysku oszacować jeden wskaźnik, który mógłby umożliwić podjęcie decyzji o zakupie akcji?

Do tego celu służy oczekiwana stopa zysku (zwrotu). Określa się ją według wzoru:

(4.2) $$R = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot R_i$$

gdzie:

R – oczekiwana stopa zwrotu;

R_i – i-ta możliwa wartość stopy zwrotu;

p_i – prawdopodobieństwo osiągnięcia przez stopę zwrotu *i*-tej wartości;

m – liczba możliwych do osiągnięcia wartości stopy zwrotu.

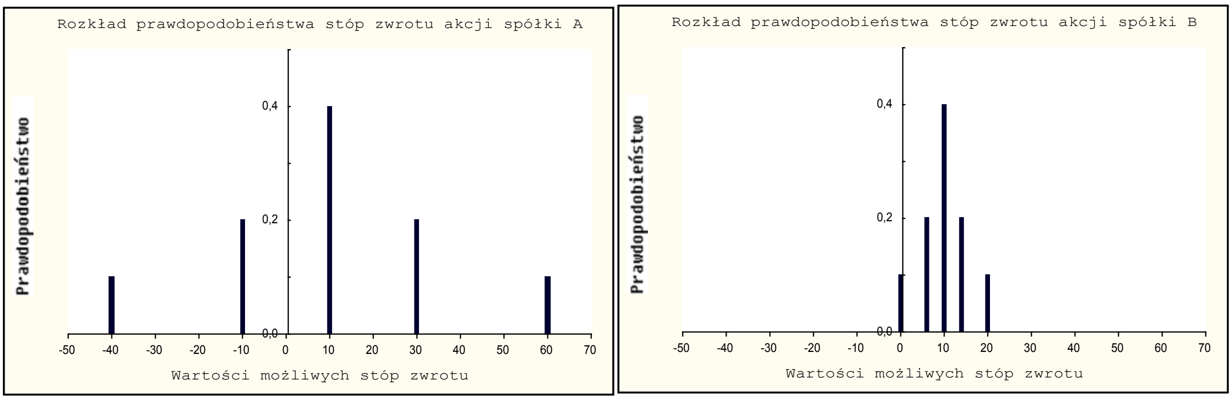
Po podstawieniu do wzoru (4.2) wartości z Tabeli 4.1 otrzymamy:

- **dla spółki A:**

$$R_A = 0.1 \cdot 60\% + 0.2 \cdot 30\% + 0.4 \cdot 10\% + 0.2 \cdot (-10\%) + 0.1 \cdot (-40\%) = 10\%$$

- **dla spółki B:**

$$R_B = 0.1 \cdot 20\% + 0.2 \cdot 14\% + 0.4 \cdot 10\% + 0.2 \cdot 6\% + 0.1 \cdot 0\% = 10\%$$



a) b)

Wykres 4.1 *Rozkłady prawdopodobieństwa stóp zwrotu akcji spółki A a) oraz B b)*

Z obliczonych wartości oczekiwanych stóp zwrotu wynika, że inwestowanie w obie spółki jest tak samo atrakcyjne (ten sam oczekiwany „zysk”). Analiza wykresów 4.1a) i 4.1b) pozwala jednakże stwierdzić, że w przypadku akcji spółki A możemy równie dobrze dużo zyskać (60% z prawdopodobieństwem 0.1) jak i dużo stracić (-40% z prawdopodobieństwem 0.1). Dzieje się tak dlatego, że rozrzut możliwych wartości stopy zwrotu wokół oczekiwanej stopy zwrotu (R_A=10%) jest duży. Takiej złej cechy nie posiada rozkład stopy zwrotu spółki B. Widać z wykresu 4.1b, że w najgorszym przypadku możemy ani nie stracić, ani nie zyskać (dla R_{5B}=0%) natomiast w najlepszym przypadku wprawdzie zyskujemy „tylko” 20% (czyli mniej niż dla najlepszego przypadku dla spółki A, tzn. dla R_{1A}=60%), ale mamy mniejszy rozrzut możliwych wartości stopy zwrotu wokół wartości oczekiwanej (tzn. wokół R_B=10%).

Dlaczego? Ponieważ z akcją *B* wiąże się znacznie mniejsze ryzyko, niż z akcją *A*.

Im większe zróżnicowanie możliwych stóp zysku, tym większe ryzyko związane z daną akcją.

Powstaje zasadniczy problem:

Jak zmierzyć ryzyko, jak wyrazić je syntetycznie za pomocą jednej liczby?

Ryzyko związane z daną akcją można zmierzyć za pomocą wariancji stopy zysku określonej wzorem:

(4.3) $$V = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot (R_i - R)^2$$

gdzie:

V **– wariancja stopy zwrotu;**
R **– oczekiwana stopa zwrotu.**

Częściej stosuje się inną miarę ryzyka, mianowicie odchylenie standardowe *s* stopy zwrotu (*standard deviation of returns*):

(4.4) $$s = \sqrt{V} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot (R_i - R)^2}$$

gdzie:

s **– odchylenie standardowe stopy zwrotu.**

Odchylenie standardowe wskazuje przeciętne odchylenie możliwych stóp zwrotu od oczekiwanej stopy zwrotu, przy czym im większe jest odchylenie standardowe, tym większe ryzyko.

Ze wzoru (4.3) oraz Tabeli 4.1 mamy:

- **dla akcji spółki A**

$$V_A = 0.1 \cdot (0.6 - 0.1)^2 + 0.2 \cdot (0.3 - 0.1)^2 + 0.4 \cdot (0.1 - 0.1)^2 + 0.2 \cdot (-0.1 - 0.1)^2 + 0.1 \cdot (-0.4 - 0.1)^2 = 0.066$$

- **dla akcji spółki B**

$$V_B = 0.1 \cdot (0.2 - 0.1)^2 + 0.2 \cdot (0.14 - 0.1)^2 + 0.4 \cdot (0.1 - 0.1)^2 + 0.2 \cdot (0.06 - 0.1)^2 + 0.1 \cdot (0 - 0.1)^2 = 0.00264$$

oraz ze wzoru (4.4):

$$s_A = \sqrt{V_A} = \sqrt{0.066} = 0.257 = 25.7\%$$
$$s_B = \sqrt{V_B} = \sqrt{0.00264} = 0.051 = 5.1\%$$

Powyższe obliczenia potwierdzają fakt zaobserwowany na wykresie 4.1, że akcje spółki B cechują się 5-cio krotnie mniejszym ryzykiem, bo $s_B < s_A$.

Portfel akcji

Gdy inwestor kupuje kilka akcji, istotne jest powiązanie ich stóp zysku, mierzone za pomocą współczynnika korelacji. Dla dwóch akcji, oznaczonych numerami 1 i 2, współczynnik korelacji określony jest wzorem:

(4.5) $$\rho_{1,2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i \cdot (R_{1i} - R_1) \cdot (R_{2i} - R_2)}{s_1 \cdot s_2}$$

Rozważania nasze oprzemy o tzw. portfel dwuskładnikowy, tzn. składający się z akcji tylko dwóch spółek.
Wprowadzimy następujące oznaczenia:
s_1, s_2 - odchylenia standardowe stóp zwrotu akcji spółki 1 i 2;
R_1, R_2 - oczekiwane stopy zwrotu akcji spółki 1 i 2;
$\rho_{1,2}$ - współczynnik korelacji stóp zwrotu akcji obu spółek;
w_1, w_2 - udziały akcji obu spółek w portfelu, przy czym[2]: $w_1 + w_2 = 1$.
Oczekiwana stopa zwrotu R_p portfela akcji dwóch spółek dana jest wzorem:

(4.6) $$R_p = w_1 \cdot R_1 + w_2 \cdot R_2$$

[2] Przypadek, gdy wykluczamy krótką sprzedaż. Wówczas udziały akcji w portfelu są liczbami nieujemnymi.

Wariancja V_p stopy zwrotu portfela dwuskładnikowego wyraża się wzorem:

(4.7) $$V_p = w_1^2 \cdot s_1^2 + w_2^2 \cdot s_2^2 + 2 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \rho_{1,2}$$

Z kolei odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela dwuskładnikowego liczymy następująco:

(4.8) $$s_p = \sqrt{V_p}$$

Przykład 4.2 (decyzyjne zadanie inwestycyjne jako zadanie PN)

Rozpatrzmy zagadnienie doboru optymalnego n-składnikowego portfela akcji. Chodzi zatem o to, aby tak dobrać udziały poszczególnych akcji w portfelu, by:

- ***stopa zwrotu portfela R_p (por. wzór (4.6)) była jak największa;***
- ***ryzyko portfela V_p (mierzone za pomocą wariancji stopy zwrotu portfela (por. wzór (4.7))) było jak najmniejsze.***

Tak zdefiniowany problem decyzyjny jest problemem dwukryterialnym, trudnym do rozwiązania w tej postaci. Najczęściej problem ten analizuje się jako dwa uproszczone problemy jednokryterialne:

- **problem I - ustalić taki portfel akcji, aby:**
  a).stopa zwrotu portfela była jak największa;
  b). ryzyko portfela było nie większe niż ustalony dopuszczalny próg wartości.

- **problem II - ustalić taki portfel akcji, aby:**
  a).ryzyko portfela było jak najmniejsze;
  b). stopa zwrotu portfela była nie mniejsza niż ustalony dopuszczalny próg wartości.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

***n* – liczba akcji w portfelu;**

R_i – oczekiwana stopa zwrotu akcji *i*-tej spółki (por. (4.2)), $i=\overline{1,n}$ **;**

x_i – udział akcji *i*-tej spółki w portfelu, $i=\overline{1,n}$ **;**

s_i – odchylenie standardowe akcji *i*-tej spółki (por. (3.3.6)), $i=\overline{1,n}$ **;**

ρ_{ij} **– współczynnik korelacji między akcją *i*-tej i *j*-tej spółki,** $i=\overline{1,n}$ **,** $j=\overline{1,n}$ **;**

R_{pdop} – dopuszczalny (dolny) próg wartości oczekiwanej stopy zwrotu portfela;

V_{pdop} – dopuszczalny (górny) próg wartości wariancji stopy zwrotu portfela.

Oba podproblemy można zdefiniować następująco:

- **podproblem I - wyznaczyć takie wartości zmiennych decyzyjnych (udziałów) x_i, aby:**

(4.9) $$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot R_i \to \max$$

przy ograniczeniach:

(4.10) $$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \cdot s_j^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_j \cdot s_j \cdot x_i \cdot s_i \cdot \rho_{ij} \le V_{pdop}$$

(4.11) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

(4.12) $$x_i \ge 0, \qquad i=\overline{1,n}$$

Zadanie (4.9)÷(4.12) ze względu na warunek (4.10) jest nieliniowym zadaniem decyzyjnym, trudnym do rozwiązania. Funkcja celu (4.9) opisuje oczekiwaną stopę zwrotu z portfela. Warunek (4.10) odpowiedzialny jest za to, że ryzyko portfela (mierzone za pomocą wariancji stopy zwrotu portfela) nie przekroczy wartości dopuszczalnego progu. Warunek (4.11) zapewnia to, że udziały w portfelu muszą się sumować do jedności (inaczej: do 100%).

podproblem II - wyznaczyć takie wartości zmiennych decyzyjnych (udziałów) x_i, aby:

(4.13) $$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \cdot s_j^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_j \cdot s_j \cdot x_i \cdot s_i \cdot \rho_{ij} \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach:

(4.14) $$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot R_i \geq R_{pdop}$$

(4.15) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

(4.16) $$x_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,n}$$

To zadanie jest również zadaniem nieliniowym, gdyż nieliniowość wprowadza funkcja celu (4.13). Minimalizuje ona wariancję stopy zwrotu z portfela. Warunek (4.14) zapewnia to, że stopa zwrotu z portfela będzie nie mniejsza niż ustalona wartość progowa R_{pdop}. Warunek (4.15) zapewnia to, że udziały w portfelu muszą się sumować do jedności (inaczej: do 100%).

Zbudujmy optymalny portfel składający się z akcji dwóch spółek A i B, które charakteryzują się następującymi parametrami:

- ***oczekiwane stopy zwrotu dla obu spółek wynoszą odpowiednio: R_A=0.0209, R_B=0.0095;***
- ***odchylenia standardowe stopy zwrotu dla obu spółek wynoszą odpowiednio: s_A=0.0547, s_B=0.0361;***
- ***współczynnik korelacji między akcjami spółki A i B wynosi: ρ_{AB}=0.5.***

Pierwszy inwestor oznajmił, że zadowoli go takie rozwiązanie, które zapewni mu maksymalną stopę zwrotu z portfela, przy średnim odchyleniu możliwych stóp zwrotu z portfela od wartości oczekiwanej nie więcej niż o 4%. Drugi inwestor nie chce ryzykować, interesuje go więc taki portfel, który minimalizuje ryzyko. Wymaga przy tym stopy zwrotu z portfela nie mniejszej niż 2%.

Dla pierwszego inwestora mamy więc następujące zadanie optymalizacji:

wyznaczyć takie wartości zmiennych decyzyjnych (udziałów) x_A oraz x_B, aby:

(4.17) $$x_A \cdot 0{,}0209 + x_B \cdot 0{,}0095 \to \max$$

przy ograniczeniach:

(4.18) $$x_A^2 \cdot 0{,}0547^2 + x_B^2 \cdot 0{,}0361^2 + 2 \cdot x_A \cdot 0{,}0547 \cdot x_B \cdot 0{,}0361 \cdot 0{,}5 \le 0{,}04^2$$

(4.19) $$x_A + x_B = 1$$

(4.20) $$x_A, x_B \ge 0$$

Rozwiązując to zadanie otrzymujemy następujące rozwiązanie optymalne: $x_A^* = 0.518$, $x_B^* = 0.482$ oraz wartość funkcji celu (oczekiwaną stopę zwrotu z portfela) równą 0.0154, czyli 1.54%. Jest to maksymalna możliwa do osiągnięcia oczekiwana stopa zwrotu z portfela przy ryzyku (wariancji stopy zwrotu z portfela) nie większym niż 0.04^2.

Z kolei dla drugiego inwestora mamy następujące zadanie optymalizacji:

wyznaczyć takie wartości zmiennych decyzyjnych (udziałów) x_A oraz x_B, aby:

(4.21) $$x_A^2 \cdot 0{,}0547^2 + x_B^2 \cdot 0{,}0361^2 + 2 \cdot x_A \cdot 0{,}0547 \cdot x_B \cdot 0{,}0361 \cdot 0{,}5 \to \min$$

przy ograniczeniach:

(4.22) $$x_A \cdot 0{,}0209 + x_B \cdot 0{,}0095 \ge 0{,}02$$

(4.23) $$x_A + x_B = 1$$

(4.24) $$x_A, x_B \ge 0$$

Rozwiązując to zadanie otrzymujemy następujące rozwiązanie optymalne: $x_A^* = 0.921$, $x_B^* = 0.079$ oraz wartość funkcji celu (wariancję stopy zwrotu z portfela) równą 0.00269. Jest to minimalna możliwa do osiągnięcia wartość ryzyka (mierzonego za pomocą wariancji stopy zwrotu z portfela), przy zapewnieniu poziomu dochodów nie mniejszego niż 2%.

Należy zauważyć, że przyjęcie zbyt wysokiej minimalnej stopy zwrotu z portfela R_{pdop} prowadzi do sprzeczności zadania lub portfela akcji o bardzo dużym ryzyku (w zadaniu (4.21)÷(4.24)). Podobnie przyjęcie zbyt niskiego poziomu ryzyka V_{pdop} w zadaniu (4.17)÷(4.20) spowoduje bądź niemożność spełnienia ograniczeń, bądź znalezienie portfela akcji o bardzo małym dochodzie.

Przydatność proponowanych modeli dla wyznaczania optymalnego portfela akcji zależy od wiarygodności informacji, tzn. od tego, czy dysponujemy dobrymi szacunkami dotyczącymi przyszłości lub czy można wykorzystać dane z przeszłości do podejmowania decyzji dotyczących przyszłości.

WŁASNOŚCI ZADAŃ PROGRAMOWANIA NIELINIOWEGO

Typy zadań

Zadanie decyzyjne postaci:

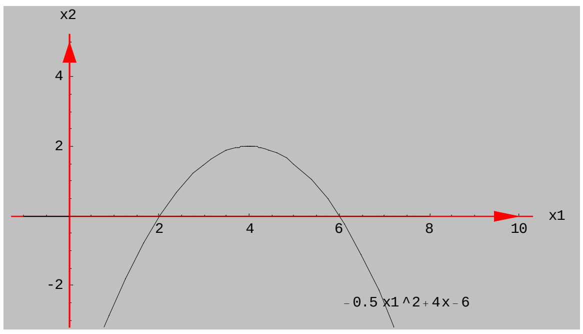
$f(\mathbf{x}) \to \max,$ (4.25)	$f(\mathbf{x}) \to \min,$ (4.25')
przy ogr.	przy ogr.
$g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \; (i = 1, \ldots, m),$ (4.26)	$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \; (i = 1, \ldots, m),$ (4.26')
$g_i(\mathbf{x}) = 0 \; (i = m+1, \ldots, r),$ (4.27)	$g_i(\mathbf{x}) = 0 \; (i = m+1, \ldots, r),$ (4.27')

nazywamy zadaniem programowania nieliniowego (PN), jeżeli funkcja celu *f(*x*)* lub chociaż jeden z warunków ograniczających $g_i(\mathbf{x})$ są nieliniowe, przy czym $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ oznacza *n*-wymiarowy wektor zmiennych decyzyjnych.

W programowaniu nieliniowym podstawowe znaczenie mają dwa rodzaje funkcji: funkcja wypukła i funkcja wklęsła.

Wykresy funkcji wypukłej oraz funkcji wklęsłej przedstawiono na rysunku poniżej.

funkcja wypukła



funkcja wklęsła

Można wyróżnić dwa podstawowe typy zadań programowania nieliniowego:

1. **zadania programowania wypukłego (PW),**
2. **zadania programowania niewypukłego (PNW).**

Zadaniem programowania wypukłego nazywamy takie zadanie programowania nieliniowego, w którym:

- **minimalizujemy wypukłą bądź maksymalizujemy wklęsłą funkcję celu,**
- **zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest zbiorem wypukłym.**

Każde inne zadanie programowania nieliniowego nazywamy zadaniem programowania niewypukłego.

Wśród zadań programowania wypukłego szczególne znaczenie zajmują zadania programowania kwadratowego, a wśród zadań programowania niewypukłego – zadania programowania wklęsłego.

Zadaniem programowania kwadratowego nazywamy zadanie PW, w którym:

- **funkcja celu jest funkcją kwadratową,**
- **wszystkie funkcje $g_i(x)$ są liniowe (zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest wielościanem wypukłym),**

Zadaniem programowania wklęsłego nazywamy zadanie programowania niewypukłego, w którym:

- **minimalizujemy wklęsłą bądź maksymalizujemy wypukłą funkcję celu,**
- **zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest wielościanem wypukłym.**

Identyfikacja typu zadania jest bardzo istotna, pozwala bowiem określić trudności, jakie mogą wystąpić przy szukaniu rozwiązania optymalnego, oraz wybrać odpowiednią metodę rozwiązania.

Warunki optymalności Kuhna-Tuckera (K-T)

Dla zadań programowania nieliniowego warunki optymalności rozwiązań określa twierdzenie Kuhna-Tuckera.

TWIERDZENIE Kuhna-Tuckera (K-T)

Jeżeli $\mathbf{x}^*$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania (4.25) – (4.27), to spełnione są następujące warunki[3]:

(a) **$\mathbf{x}^*$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym, czyli:**

(4.28)
$$g_i(\mathbf{x}^*) \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m),$$
$$g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \ (i = m+1, \ldots, r),$$

(4.29)
$$\begin{cases} \lambda_i \geq 0, & \text{dla } i = 1, \ldots, m \\ \lambda_i - \text{dowolne}, & \text{dla } i = m+1, \ldots, r \end{cases}$$
$$\lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \ (i = 1, \ldots, m),$$

(4.30)
$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

gdzie $\mathbf{0}$ oznacza *n*-wymiarowy wektor zer.

Warunki typu (a) określają spełnienie ograniczeń. Jeżeli któreś z ograniczeń miałoby zwrot „≤”, to należy to ograniczenie pomnożyć przez –1. Podobnie, jeśli funkcja celu $f(\mathrm{x})$ podlegałaby minimalizacji, to należy ją przemnożyć przez –1 i funkcja $-f(\mathrm{x})$ podlega wówczas maksymalizacji[4].
W warunkach typu (b) mnożniki λ_i muszą być nieujemne tylko dla warunków zadania PN w postaci nierówności, przy czym, gdy warunek jest spełniony z ostrą nierównością, to z (4.29) wynika, że odpowiadający mu mnożnik λ_i musi być równy zero.
Warunków typu (c) jest tyle, ile elementów (zmiennych) ma wektor x^* (czyli *n*).

---
[3] Uwaga! W literaturze spotyka się różne, równoważne, definicje warunków K-T.
[4] Wynika to z tego, że: min f(x) = – max (–f(x)).

Symbol $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ oznacza gradient funkcji *f(*x*)*, czyli wektor pochodnych cząstkowych tej funkcji, tzn.:

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)$$

oraz $\nabla_{\mathbf{x}} g_i(\mathbf{x})$ oznacza gradient funkcji $g_i(\mathbf{x})$:

$$\nabla_{\mathbf{x}} g_i(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)$$

gdzie:

$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ **- pochodna cząstkowa funkcji *f* względem *j*-tej składowej wektora x,**

$\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ **- pochodna cząstkowa funkcji g_i względem *j*-tej składowej wektora x.**

Zapisując warunek typu (c) w postaci skalarnej otrzymamy *n* następujących warunków:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial g_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_r \cdot \frac{\partial g_r(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial g_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_r \cdot \frac{\partial g_r(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} = 0$$

(4.30a)
$$\vdots$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial g_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_r \cdot \frac{\partial g_r(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} = 0$$

Warunki różniczkowe Kuhna-Tuckera są warunkami koniecznymi optymalności (nie są, w ogólnym przypadku, warunkami wystarczającymi). Każde rozwiązanie optymalne zadania programowania nieliniowego musi spełniać warunki (a)-(c), ale rozwiązanie spełniające te warunki niekoniecznie jest optymalne.

Istotne jest, że dla zadań programowania wypukłego warunki Kuhna-Tuckera są warunkami wystarczającymi.

Jeżeli rozwiązanie dopuszczalne spełnia warunki różniczkowe Kuhna-Tuckera, to jest rozwiązaniem optymalnym. Jeżeli natomiast warunków nie spełnia, to nie jest rozwiązaniem optymalnym.

Można zatem powiedzieć, że:

- **Dla zadań programowania wypukłego warunki Kuhna-Tuckera pozwalają jednoznacznie ocenić, czy badane rozwiązanie jest optymalne.**
- **Dla zadań programowania niewypukłego warunki Kuhna-Tuckera są spełnione przez każde rozwiązanie będące ekstremum lokalnym, wobec tego nie można wnioskować, czy otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym (globalnie).**

Przykład 4.3

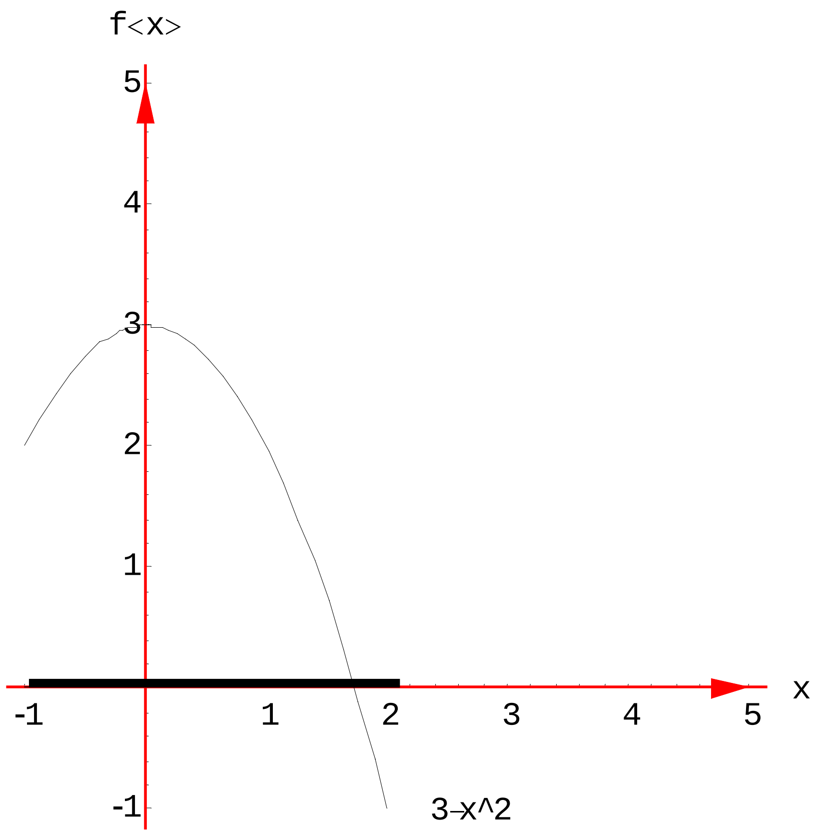
Rozważmy zadanie programowania nieliniowego:

(4.31) $f(x) = 3 - x^2 \to \max,$

przy ogr.

(4.32) $-1 \le x \le 2$

Wykres funkcji celu (4.31) przedstawiono na rysunku.



Funkcja celu (4.31) jest wklęsła, a zadanie jest na maksimum, więc jest to zadanie programowania wypukłego. Z rysunku wynika, że optymalnym rozwiązaniem zadania (4.31) – (4.32) jest punkt $x^*=0$, z maksymalną wartością funkcji celu $f(x^*)=3$.

Zapiszmy warunek (4.32) w konwencji przyjętej w programowaniu nieliniowym:

$$g_1(x) = 2 - x \geq 0,$$
$$g_2(x) = x + 1 \geq 0.$$

Dla zadania (4.31) – (4.32) warunki Kuhna-Tuckera mają postać:

(a) $2 - x \geq 0, \quad x + 1 \geq 0,$

(b) $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 \cdot (2 - x) = 0, \quad \lambda_2 \cdot (x + 1) = 0,$

(c) $-2x + \lambda_1 \cdot (-1) + \lambda_2 \cdot 1 = 0$

bo $\nabla_{\mathbf{x}} f(x) = \nabla_{\mathbf{x}}(3 - x^2) = (3 - x^2)' = -2x$ **oraz**

$$\nabla_{\mathbf{x}} g_1(x) = \nabla_{\mathbf{x}}(2 - x) = -1$$
$$\nabla_{\mathbf{x}} g_2(x) = \nabla_{\mathbf{x}}(x + 1) = 1$$

Jedynym punktem ze zbioru rozwiązań dopuszczalnych, który spełnia warunki Kuhna-Tuckera (a)-(c), jest x=0 z mnożnikiem λ_1=0, λ_2=0. Punkt x^*=0 jest rozwiązaniem optymalnym zadania (4.28)–(4.29)
(ale nie jest wierzchołkiem zbioru rozwiązań dopuszczalnych !).

WNIOSEK!
Rozwiązanie optymalne zadania programowania wypukłego nie musi znajdować się w wierzchołku lub na brzegu zbioru rozwiązań dopuszczalnych (tak, jak to było w przypadku zadań PL).

Przykład 4.4

Z elektrociepłowni energia przesyłana jest do dwóch zużywających ją zakładów produkcyjnych. Funkcja kosztów przesyłania energii do tych zakładów w zależności od wielkości przesyłu (odpowiednio, do zakładu I – x_1, i do zakładu II – x_2) dana jest wzorem:

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 8x_1 \cdot x_2 + 7x_2^2 - 12x_1 - 4x_2 + 81$$

Rozdzielić dzienną produkcję energii wynoszącą 16 MWh pomiędzy te dwa zakłady tak, aby minimalizować koszty przesyłu energii.

<u>Rozwiązanie</u>

Zgodnie z treścią, zadanie do rozwiązania jest następujące:

(4.33) $$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 8x_1 \cdot x_2 + 7x_2^2 - 12x_1 - 4x_2 + 81 \to \min$$

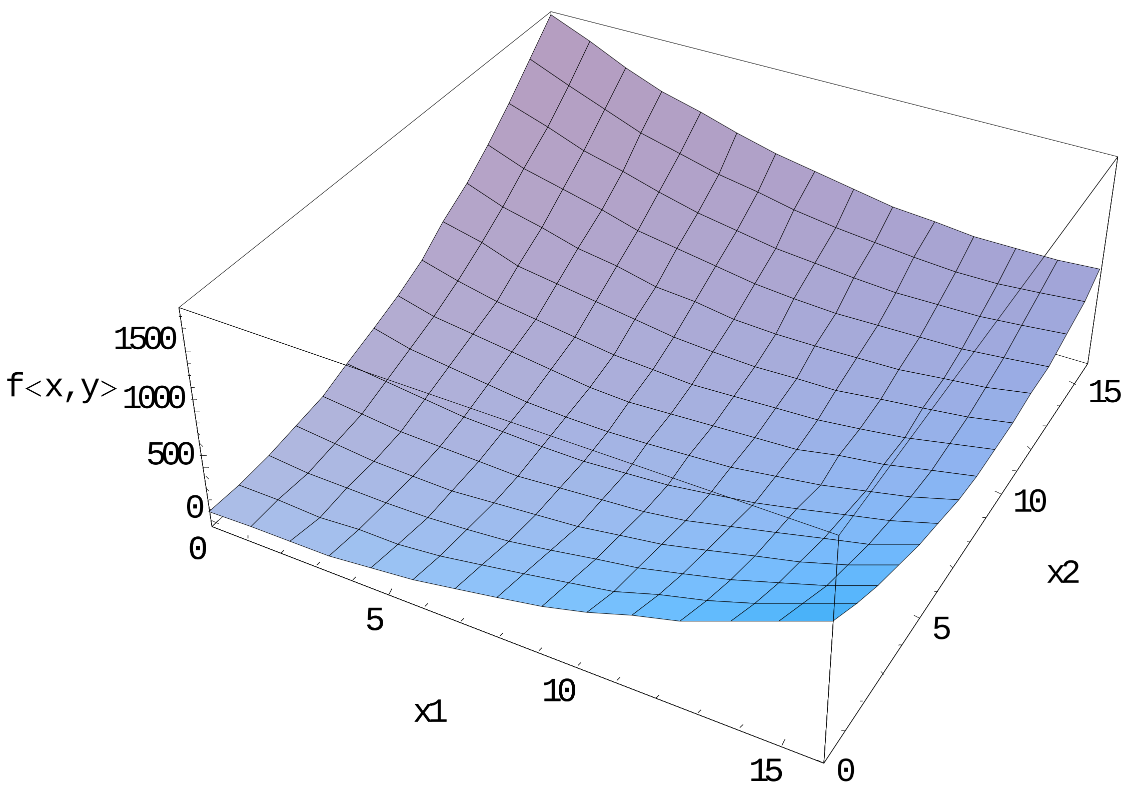
przy ograniczeniach:

(4.34) $$g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 16$$

(4.35) $$g_2(x_1, x_2) = x_1 \geq 0$$

(4.36) $$g_3(x_1, x_2) = x_2 \geq 0$$

Wykres funkcji celu (4.33) przedstawiono poniżej.



Najpierw musimy zapisać zadanie (4.33)-(4.36) w równoważnej postaci, jako zadanie typu (4.25)-(4.27), gdyż podane w (4.28)-(4.30) warunki Kuhna-Tuckera dotyczą zadania postaci (4.25)-(4.27). Otrzymamy zadanie:

(4.33') $$f(x_1,x_2) = -5x_1^2 + 8x_1 \cdot x_2 - 7x_2^2 + 12x_1 + 4x_2 - 81 \to \max$$

przy ograniczeniach (4.34)-(4.36).

Warunki Kuhna-Tuckera dla tego zadania są następujące:

(a) $$x_1 + x_2 - 16 = 0,\quad x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0$$

(b) $$\lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0,\quad \lambda_2 \cdot x_1 = 0,\quad \lambda_3 \cdot x_2 = 0$$

(c) $$\begin{cases} \text{I} & -10x_1 + 8x_2 + 12 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \text{II} & 8x_1 - 14x_2 + 4 + \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Warunek (c).I otrzymaliśmy obliczając:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial g_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \lambda_3 \cdot \frac{\partial g_3(x_1,x_2)}{\partial x_1}$$

natomiast warunek (c).II obliczając:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial g_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} + \lambda_3 \cdot \frac{\partial g_3(x_1,x_2)}{\partial x_2}$$

gdzie:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -10x_1 + 8x_2 + 12 \qquad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 8x_1 - 14x_2 + 4$$

$$\frac{\partial g_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial g_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial g_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial g_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial g_3(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial g_3(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 1$$

Rozwiązanie układu równań i nierówności określonego przez warunki (a)-(c) możemy dokonać np. poprzez przyjmowanie pewnych założeń co do wartości mnożników λ_i, a następnie sprawdzanie, czy spełnione są wszystkie warunki (a)-(c).

Przyjmijmy na początek, że $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Przy tych założeniach otrzymujemy, że spełnione są warunki typu (b) oraz pozostaje nam do rozwiązania następujący układ równań (przy czym musimy pamiętać, że otrzymane wartości zmiennych x_1, x_2 muszą być nieujemne, aby spełnić pozostałe dwa założenia wynikające z warunku typu (a)):

(a) $$x_1 + x_2 - 16 = 0$$

(c) $$\begin{aligned} -10x_1 + 8x_2 + 12 + \lambda_1 &= 0 \\ 8x_1 - 14x_2 + 4 + \lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

Eliminujemy λ_1 z (c.I) i (c.II) poprzez pomnożenie (c.I) przez (-1) i dodanie stronami obu równań:

$$\left\{\begin{aligned} 10x_1 - 8x_2 - 12 - \lambda_1 &= 0 \\ 8x_1 - 14x_2 + 4 + \lambda_1 &= 0 \end{aligned}\right. \Bigg| (+)$$

Otrzymamy:

$$18x_1 - 22x_2 - 8 = 0$$

Dodając równanie (a) otrzymujemy układ równań:

$$\begin{matrix} I \\ II \end{matrix} \begin{cases} 18x_1 - 22x_2 - 8 = 0 \\ x_1 + x_2 - 16 = 0 \end{cases}$$

Z równania *II* wyznaczamy $x_2 = 16 - x_1$ **i wstawiamy do *I*, otrzymując:**

$$18x_1 - 22 \cdot (16 - x_1) - 8 = 18x_1 - 352 + 22x_1 - 8 = 0$$

$$40x_1 = 360 \quad / : 40 \quad \rightarrow \quad x^*_1 = \mathbf{9}$$

oraz

$$\mathrm{x}_2 = 16 - x_1 \quad \rightarrow \quad x^*_2 = \mathbf{7}$$

$$\lambda_1 = 10 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 - 12 \quad \rightarrow \quad \lambda^*_1 = 22$$

Otrzymaliśmy następujące rozwiązanie: $x_1^* = 9$, $x_2^* = 7$, $\lambda_1^* = 22$, $\lambda_2^* = \lambda_3^* = 0$**. Zauważmy, że wszystkie warunki typu (a)-(c) dla otrzymanego rozwiązania są spełnione, zatem para** $(x_1^*, x_2^*) = (9, 7)$ **jest rozwiązaniem optymalnym problemu (4.33)-(4.36). Wartość funkcji celu (4.33) dla otrzymanego rozwiązania jest maksymalna i wynosi** $f(x_1^*, x_2^*) = 189$**.**