

Zbigniew TARAPATA*

O PROBLEMIE ZLICZANIA DRÓG W GRAFACH

W pracy przedstawiono oszacowania na liczbę dróg oraz dróg prostych w grafach zwykłych oraz Berge'a. Dla grafów pełnych wykazano, że liczba dróg prostych między dowolną parą wierzchołków jest równa liczbie pewnych wariacji bez powtórzeń. Podano rekurencyjne procedury wyliczania (dla grafów pełnych) lub szacowania (dla grafów niepełnych) liczby dróg prostych oraz oszacowano ich złożoności obliczeniowe. Przedstawiono wyniki oszacowań liczby dróg prostych dla wybranych grafów.

1. Wprowadzenie

Problemy zliczania dróg w grafie, pomijając fakt, że są problemami kombinatorycznymi i interesującymi choćby z tego punktu widzenia, często występują w praktycznych zagadnieniach oraz algorytmach ich rozwiązywania. W strukturach niezawodnościowych liczba dróg między ustaloną parą elementów systemu (wierzchołków grafu będącego modelem struktury systemu) jest jedną z charakterystyk, na podstawie której można wnioskować o niezawodności systemu. Jednym z postulatów, który wykorzystuje się np. przy projektowaniu topologii sieci komputerowej jest jak najmniejsza jej wrażliwość na awarie. Postulat ten realizowany jest m.in. poprzez taką budowę struktury sieci, aby liczba dróg między dowolną parą komputerów (wierzchołków grafu) była możliwie największa przy przyjętych ograniczeniach topologicznych [13]. Pojęcie liczby dróg wykorzystywane jest również do oszacowania złożoności niektórych algorytmów grafowych [10]. Dla przykładu, jedną z metod wyznaczania zbioru rozłącznych dróg w grafie G (wykorzystywanych m.in. w problemach routingu) jest kolorowanie tzw. grafu konfliktów G_k [4]. Wierzchołkami grafu konfliktów G_k są drogi (np. między wybraną parą wierzchołków) w grafie G , a krawędzie łączą te pary wierzchołków (dróg w G), które są kolidujące¹. Oszacowanie złożoności tego problemu dla grafu G zależy oczywiście od liczby dróg, gdyż złożoność dowolnego algorytmu kolorowania grafu G_k zależy od liczby jego wierzchołków, którą jest w tym przypadku liczba dróg w G .

Liczba dróg jest także nierozzerwalnie związana z problemami wyznaczania dróg ekstremalnych w grafach i sieciach. Niektóre algorytmy wykorzystują

* Zakład Badań Operacyjnych i Wspomagania Decyzji, Instytut Systemów Informatycznych, Wydział Cybernetyki, Wojskowa Akademia Techniczna, ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa, e-mail: ztarap@isi.wat.waw.pl.

¹ Drogi nazywamy kolidującymi jeśli zawierają wspólne wierzchołki lub krawędzie (w zależności od interpretacji i potrzeb modelowych).

liczbę dróg między wierzchołkami, jako funkcję wagową pozwalającą wyznaczyć w grafie drogę „bezpieczną” [9], tzn. taką, która w przypadku zniszczenia jakiegokolwiek odcinka drogi posiada największą liczbę potencjalnych objazdów.

W niniejszej pracy skupiono się na problemie zliczania dróg w grafach Berge’a i zwykłych², które występują w praktyce modelowania najczęściej.

2. Definicje i oznaczenia

W teorii grafów i sieci używa się szeregu pojęć i definicji związanych z drogami, które przez wielu autorów ([2], [3], [5], [12]) są definiowane i rozumiane w różny sposób, co może prowadzić do nieporozumień. Aby uniknąć takich nieporozumień podamy definicje pojęć (zgodne z przedstawionymi w ([3], [8])) używanych w dalszej części artykułu.

*Marszrutą*³ $M(x_p, x_k)$ w grafie $G = \langle W, U \rangle$ (W – zbiór wierzchołków, U – zbiór gałęzi⁴), łączącą wierzchołek x_p z x_k nazywamy naprzemienny ciąg wierzchołków i incydentnych (przyległych) z nimi gałęzi grafu, rozpoczynający się w wierzchołku początkowym x_p i kończący w wierzchołku końcowym x_k .

Długością marszruty nazywamy liczbę gałęzi grafu wchodzących w skład marszruty.

Marszrutą skierowaną $M_s(x_p, x_k)$ nazywamy taką marszrutę, w której po łukach (jeśli występują w marszrucie) poruszamy się zgodnie z ich kierunkiem.

*Drogą*⁵ $D(x_p, x_k)$ nazywamy marszrutę skierowaną o różnych gałęziach.

*Drogą prostą*⁶ $D_p(x_p, x_k)$ nazywamy drogę o różnych wierzchołkach.

Macierzą $\mathbf{Q} = [q_{i,j}]_{N \times N}$ *przyległości wierzchołków*⁷ nazywamy macierz kwadratową (N oznacza liczbę wierzchołków grafu), której element $q_{i,j}$ określa liczbę gałęzi w grafie między parą wierzchołków i, j , tzn. $q_{i,j} = \text{card}\{u(s,t) \in U : (s=i, t=j) \vee (s=j, t=i)\}$, gdzie $u(s,t)$ oznacza gałąź z wierzchołka $s \in W$ do $t \in W$, U jest zbiorem gałęzi grafu, $\text{card } X$ oznacza moc zbioru X .

² Używa się również pojęcia graf prosty.

³ Niektórzy autorzy używają pojęcia: trasa [12], droga [5].

⁴ Ponieważ dalsze rozważania dotyczyć będą grafów Berge’a i zwykłych, więc zbiór gałęzi dla grafu Berge’a definiowany będzie jako: $U = \{(k,l) : k \in W, l \in W\}$ natomiast dla grafu zwykłego: $U = \{\{k,l\} : k \in W, l \in W\}$.

⁵ Niektórzy autorzy używają pojęć: ścieżka [12], [4], droga prosta (półprosta) [5].

⁶ Niektórzy autorzy używają pojęć: droga [12], ścieżka [2], droga elementarna [2], [5].

⁷ Stosowana głównie do reprezentacji grafów nieskierowanych (np. zwykłych).

Macierzą $\mathbf{R} = [r_{i,j}]_{N \times N}$ przejść⁸ nazywamy macierz kwadratową (N oznacza liczbę wierzchołków grafu), której element $r_{i,j}$ określa sumę liczby krawędzi oraz łuków między uporządkowaną parą wierzchołków i,j , tzn. $r_{i,j} = \text{card}\{u(i,j) \in U\}$.

3. Oszacowanie liczby dróg w dowolnym grafie

Zacniemy od oszacowania liczby wszystkich dróg $L_{i,j}$ oraz dróg prostych $LP_{i,j}$ między parą wierzchołków i,j w skończonym grafie G . Przez $L_{i,j}^p$ ($LP_{i,j}^p$) oznaczymy liczbę dróg (dróg prostych) o długości p (czyli zawierających p gałęzi) między parą wierzchołków i,j w skończonym grafie G . Skorzystamy przy tym ze znanych twierdzeń w teorii grafów.

Twierdzenie 1 [3]

Element $q_{i,j}^p$ p -tej potęgi macierzy \mathbf{Q} przyległości wierzchołków ($p \geq 1$)⁹ jest równy liczbie różnych marszrut o długości p z wierzchołka i do wierzchołka j .

Dowód znajduje się np. w [3].

Twierdzenie 2 [3]

Element $r_{i,j}^p$ p -tej potęgi macierzy \mathbf{R} przejść ($p \geq 1$)¹⁰ jest równy liczbie różnych marszrut skierowanych o długości p z wierzchołka i do wierzchołka j .

Dowód znajduje się np. w [3].

Biorąc pod uwagę własności mnożenia macierzy element $r_{i,j}^p$ (analogicznie $q_{i,j}^p$) wyliczamy następująco:

$$(3.1) \quad r_{i,j}^p = \sum_{n=1}^N r_{i,n} \cdot r_{n,j}^{p-1}, \quad p = 2, \dots, N-1$$

⁸ Stosowana głównie do reprezentacji grafów skierowanych (np. Berge'a).

⁹ Z formalnego punktu widzenia marszruta o długości $p=0$ istnieje. Jednakże z praktycznego punktu widzenia interesują nas marszrutu o długości $p>0$ (tzn. posiadające przynajmniej jedną gałąź).

¹⁰ Uwaga jak wyżej.

Wyliczenie $r_{i,j}^p$ wymaga N mnożeń oraz $N-1$ dodawań, więc koszt wyliczenia pojedynczego elementu macierzy \mathbf{R}^p (przy znajomości elementów macierzy \mathbf{R}^{p-1}) jest rzędu¹¹ $\Theta(N)$. Gdyby korzystać ze wzoru na mnożenie macierzy, tzn. $\mathbf{R}^p = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{p-1}$, to byłby to koszt czasowy rzędu $\Theta(N^3)$, a dla dowolnego $p - \Theta(pN^3)$. Zauważmy jednak, że z (3.1) wynika, iż aby policzyć $r_{i,j}^p$ (jako element macierzy \mathbf{R}^p) wystarczy nam znajomość tylko elementów w kolumnie o numerze j macierzy \mathbf{R}^{p-1} . Wyliczenie elementów j -tej kolumny macierzy \mathbf{R}^p (przy znajomości elementów macierzy \mathbf{R}^{p-1}) wymaga N mnożeń oraz $N-1$ dodawań (dla wyliczenia pojedynczego elementu w kolumnie) oraz N takich działań (bo elementów w kolumnie jest N), więc koszt ich wyliczenia jest rzędu $\Theta(N^2)$. Ponieważ, jak to wcześniej zaznaczyliśmy, wyliczenie $r_{i,j}^p$ wymaga znajomości elementów w kolumnie o numerze j macierzy \mathbf{R}^{p-1} , z kolei wyliczenie $r_{i,j}^{p-1}$ wymaga znajomości elementów w kolumnie o numerze j macierzy \mathbf{R}^{p-2} itd., więc dla ustalonego p wyliczenie $r_{i,j}^p$ niesie za sobą koszt czasowy rzędu $\Theta(pN^2)$.

Z definicji wcześniej podanych wynika, że marszruta skierowana jest szczególnym przypadkiem marszruty, droga jest szczególnym przypadkiem marszruty skierowanej, a z kolei droga prosta jest szczególnym przypadkiem drogi, więc oszacowanie liczb $L_{i,j}^p$ oraz $LP_{i,j}^p$ jest oczywiste:

$$(3.2) \quad 0 \leq LP_{i,j}^p \leq L_{i,j}^p \leq r_{i,j}^p \leq q_{i,j}^p$$

Ponieważ w dowolnym grafie długość najkrótszej drogi prostej jest nie mniejsza niż 1, długość najdłuższej drogi prostej jest nie większa niż $N-1$, więc liczbę LP_{ij} wyznaczmy następująco:

$$(3.3) \quad 0 \leq LP_{i,j} = \sum_{p=1}^{N-1} LP_{i,j}^p \leq \sum_{p=1}^{N-1} L_{i,j}^p \leq \sum_{p=1}^{N-1} r_{i,j}^p \leq \sum_{p=1}^{N-1} q_{i,j}^p$$

Oszacowanie dla liczby dróg (nieprostych) wygląda trochę inaczej, gdyż długość najdłuższej drogi jest nie większa niż liczba A gałęzi grafu¹². Zatem:

¹¹ Definicja za [7]: mówimy, że funkcja $f(x):R^* \rightarrow R^*$ jest rzędu $g(x):R^* \rightarrow R^*$, co zapisujemy $\Theta(g(x))$, jeśli istnieją takie stałe $c_1, c_2 > 0$ oraz $x_0 \in R^*$, że dla każdego $x \geq x_0$ zachodzi $c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$.

¹² Na przykład dowodzi się ([2], [5]), że dla grafu zwykłego $A \leq N(N-1)/2$, dla grafu Berge'a bez pętli (krawędzi własnych) $A \leq N(N-1)$, a dla grafu Berge'a z pętlami $A \leq N^2$.

$$(3.4) \quad 0 \leq L_{i,j} = \sum_{p=1}^A L_{i,j}^p \leq \sum_{p=1}^A r_{i,j}^p \leq \sum_{p=1}^A q_{i,j}^p$$

Przedstawione w (3.2) i (3.3) oszacowania można znacznie poprawić oraz zwiększyć efektywność ich wyliczania. Mianowicie można zmodyfikować element $r_{i,j}^p$ p -tej potęgi macierzy \mathbf{R} przejść zgodnie z następującym rozumowaniem. Skoro chcemy ustalić liczbę $LP_{i,j}^p$ dróg prostych o długości p , to możemy przyjąć, że $r_{j,k}^p = 0$, ($k=1, \dots, N$, $p=1, \dots, N-1$) (zerowanie wiersza macierzy \mathbf{R} o numerze j), $r_{k,i}^p = 0$, ($k=1, \dots, N$, $p=1, \dots, N-1$) (zerowanie kolumny macierzy \mathbf{R} o numerze i) oraz $r_{k,k}^p = 0$, ($k=1, \dots, N$, $p=1, \dots, N-1$) (zerowanie głównej przekątnej macierzy \mathbf{R}). Przyjęcie $r_{j,k}^p = 0$ ($k=1, \dots, N$, $p=1, \dots, N-1$) uzasadnione jest tym, że odcinek żadnej drogi prostej prowadzącej do wierzchołka o numerze j nie może z tego wierzchołka wychodzić. Podobnie, przyjęcie $r_{k,i}^p = 0$ ($k=1, \dots, N$, $p=1, \dots, N-1$) wynika z tego, iż odcinek żadnej drogi prostej prowadzącej z wierzchołka o numerze i nie może do tego wierzchołka dochodzić. Z kolei przyjęcie, że $r_{k,k}^p = 0$ ($k=1, \dots, N$, $p=1, \dots, N-1$) jest spowodowane tym, że w żadnym odcinku drogi prostej nie może powtórzyć się wierzchołek k .

Możemy zatem wyliczyć zmodyfikowane elementy $\hat{r}_{i,j}^p$ p -tej potęgi macierzy przejść z formuły (3.1), biorąc pod uwagę wcześniejsze uwagi dotyczące zerowania niektórych elementów macierzy. Z formuły (3.1) wynika, że aby wyznaczyć $\hat{r}_{i,j}^p$ musimy znać wszystkie elementy $\hat{r}_{k,j}^p$ ($k=1, \dots, N$) macierzy w kolumnie o numerze j . Otrzymamy zatem rekurencyjną formułę na wyliczanie $\hat{r}_{i,j}^p$ (dla $k=i$):

$$(3.5) \quad \hat{r}_{k,j}^p = \begin{cases} \sum_{n=1}^N \hat{r}_{k,n} \cdot \hat{r}_{n,j}^{p-1}, & \text{dla } k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{j\} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}, \quad p=2, \dots, N-1$$

przy czym

$$(3.6) \quad \hat{r}_{k,n} = \begin{cases} r_{k,n}, & \text{dla } (k \neq j) \wedge (n \neq i) \wedge (k \neq n) \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Zatem zmodyfikowane oszacowanie (3.3) będzie wyglądać następująco:

$$(3.7) \quad 0 \leq LP_{i,j} = \sum_{p=1}^{N-1} LP_{i,j}^p \leq \sum_{p=1}^{N-1} \hat{r}_{i,j}^p \leq \sum_{p=1}^{N-1} \hat{q}_{i,j}^p$$

Złożoność obliczeniowa tego algorytmu jest analogiczna jak procedury opisanej przez (3.1), tzn. $\Theta(pN^2)$ (z dokładnością do stałej liczby operacji zerowania wiersza j , kolumny i oraz głównej przekątnej macierzy, czyli $3N$ operacji).

4. Wyznaczanie liczby dróg w grafach pełnych

Liczba dróg $L_{i,j}$ oraz dróg prostych $LP_{i,j}$ między dowolną parą wierzchołków i, j w grafie G zależy od jego struktury. Skupimy się na grafach zwykłych i grafach Berge'a, które najczęściej występują w praktyce, jako modele obiektów rzeczywistych.

Niech G_F będzie grafem pełnym w klasie grafów Berge'a lub zwykłych.

Wobec tego dla grafu G_F liczność zbioru połączeń¹³ $r_{k,l}$ między dowolną parą różnych wierzchołków k, l jest równa 1. Jednocześnie, dla każdego wierzchołka k w G_F zachodzi, że $\sum_{l=1}^N r_{k,l} = N-1$ oraz $\sum_{l=1}^N r_{l,k} = N-1$ (dla grafu zwykłego) lub

$\sum_{l=1}^N r_{k,l} = N$ oraz $\sum_{l=1}^N r_{l,k} = N$ (dla grafu Berge'a), tzn. każdy wierzchołek jest połączony łukiem (graf Berge'a) lub krawędzią (graf zwykły) z $N-1$ (N dla grafu Berge'a) wierzchołkami¹⁴.

Podamy obecnie, w jaki sposób można dokładnie wyliczyć liczbę $LP_{i,j}^p$ dróg prostych o długości p między parą różnych wierzchołków i, j . Oczywiście oszacowania przedstawione w (3.3) są prawdziwe.

¹³ Jeżeli chodzi o macierzową reprezentację grafu, to różnica między grafem Berge'a a zwykłym jest taka, że dla grafu Berge'a dla każdej pary wierzchołków i, j zachodzi $q_{ij} \leq 1$ (element macierzy \mathbf{Q}), a dla grafu zwykłego: $q_{ij} \leq 2$, natomiast macierz \mathbf{R} jest identyczna dla obu grafów (poza główną przekątną).

¹⁴ Jeżeli założymy, że w grafie Berge'a nie występują pętle (krawędzie własne) przy wierzchołkach, to prawdziwa jest zależność (dla każdego k): $\sum_{l=1}^N r_{k,l} = N-1$ oraz $\sum_{l=1}^N r_{l,k} = N-1$.

Twierdzenie 3

Niech G_F będzie N -wierzchołkowym grafem pełnym w klasie grafów Berge'a lub zwykłych. Liczba dróg prostych $LP_{i,j}^p$ o długości $p \geq 1$ w G_F między dowolną parą różnych wierzchołków i, j jest równa:

$$(4.1) \quad LP_{i,j}^p = \frac{(N-2)!}{(N-p-1)!}$$

Dowód:

W grafie G_F istnieje tylko jedna droga o długości $p=1$ między parą różnych wierzchołków i, j , gdyż każdy wierzchołek jest połączony z każdym innym za pomocą dokładnie jednej gałęzi (krawędzi lub łuku). Z zależności (4.1) otrzymujemy: $LP_{i,j}^1 = \frac{(N-2)!}{(N-1-1)!} = \frac{(N-2)!}{(N-2)!} = 1$, zatem dla $p=1$ teza jest prawdziwa.

Dla każdego $p > 1$ liczbę $LP_{i,j}^p$ można wyznaczyć korzystając z poniższego rozumowania. Każda droga o długości p składa się z $p+1$ wierzchołków (włączając wierzchołek początkowy i końcowy) i oczywiście z p gałęzi. Zatem drogę w G_F możemy jednoznacznie zidentyfikować za pomocą ciągu $p+1$ wierzchołków. Jeśli pominiemy wierzchołki początkowy i końcowy, to otrzymujemy, że każda droga składa się z $p-1$ wierzchołków wewnętrznych. Ponieważ G_F jest grafem pełnym, więc każdy z $N-2$ wierzchołków grafu G_F (poza i oraz j) może być wierzchołkiem wewnętrznym drogi z i do j .

Powstaje pytanie: na ile sposobów można ustalić kolejność występowania $p-1$ wierzchołków wewnętrznych drogi o długości p ?

Ponieważ wierzchołki w drodze prostej nie mogą się powtarzać i każdy z $N-2$ wierzchołków grafu G_F może być wierzchołkiem wewnętrznym, więc liczba dróg o długości p między parą różnych wierzchołków i oraz j jest równa liczbie różnych ciągów $(p-1)$ -elementowych spośród $N-2$ elementów, a ta jest równa liczbie wariacji bez powtórzeń¹⁵ $(p-1)$ -elementowych spośród $N-2$ elementów, tzn.: $\frac{(N-2)!}{(N-2-(p-1))!} = \frac{(N-2)!}{(N-p-1)!}$. Otrzymaliśmy tezę opisaną przez (4.1), co

kończy dowód.

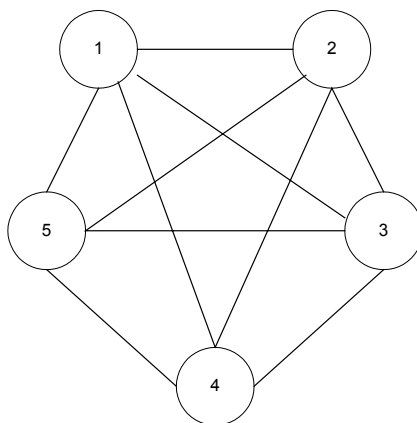
¹⁵ Przypomnijmy, że liczba k -elementowych wariacji bez powtórzeń spośród n elementów jest

równa ([1], [6]): $n_{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$.

Przykład

Dla grafu z Rys.1 wyznaczmy wszystkie drogi proste o długości $p \leq N-1$ z wierzchołka 1 do 5 (dla każdej pary wierzchołków otrzymamy analogiczne rozwiązania; wierzchołki 1 i 5 zostały wybrane tylko dla ustalenia uwagi):

- dla $p=1$:
1-5;



Rys.1 Graf 5-cio wierzchołkowy, pełny w klasie grafów zwykłych

- dla $p=2$:
1-2-5,
1-3-5,
1-4-5;
- dla $p=3$:
1-2-3-5, 1-2-4-5,
1-3-2-5, 1-3-4-5,
1-4-2-5, 1-4-3-5;
- dla $p=4$:
1-2-3-4-5, 1-2-4-3-5,
1-3-2-4-5, 1-3-4-2-5,
1-4-2-3-5, 1-4-3-2-5;

Widać więc, że ciągi wierzchołków wewnętrznych drogi są elementami $(p-1)$ -elementowych wariacji bez powtórzeń spośród $5-2=3$ elementów. Wyliczając liczbę dróg prostych ze wzoru (4.1) otrzymamy:

$$LP_{1,5}^1 = \frac{(5-2)!}{(5-1-1)!} = \frac{3!}{3!} = 1,$$

$$LP_{1,5}^2 = \frac{(5-2)!}{(5-2-1)!} = \frac{3!}{2!} = 3,$$

$$LP_{1,5}^3 = \frac{(5-2)!}{(5-3-1)!} = \frac{3!}{1!} = 6,$$

$$LP_{1,5}^4 = \frac{(5-2)!}{(5-4-1)!} = \frac{3!}{0!} = 6.$$

Przedstawimy obecnie rekurencyjną procedurę wyliczania $LP_{i,j}^p$. Pomocne w tym przypadku będzie poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4

Dla każdych naturalnych: $n > 1$ oraz $n \geq k \geq 1$, niech:

$$(4.2) \quad S_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Wówczas prawdziwe są równości:

$$(4.3) \quad S_k = S_{k-1} \cdot (n-k+1),$$

oraz $S_0 = 1$.

Dowód:

To, że $S_0 = 1$ jest oczywiste, gdyż $\frac{n!}{n!} = 1$.

Formuła (4.3) prawdziwa jest dla $k=1$ ponieważ:

$$S_1 = S_0 \cdot (n-1+1) = n$$

oraz z (4.2) otrzymujemy, że $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$.

Weźmy $k=m$ i załóżmy, że formuła (4.3) jest prawdziwa. Otrzymamy:

$$(*) \quad S_m = \frac{n!}{(n-m)!} = S_{m-1} \cdot (n-m+1)$$

Wykażemy teraz, że wyrażenie (*) prawdziwe jest dla $m+1$. Dla $m+1$ otrzymamy:

$$(**) \quad S_{m+1} = \frac{n!}{(n-(m+1))!} = S_m \cdot (n-(m+1)+1)$$

Lewa strona L wyrażenia (**) jest równa:

$$L = \frac{n!}{(n-m-1)!}$$

Prawa strona P wyrażenia (**) wynosi:

$$\begin{aligned} P &= S_m \cdot (n-(m+1)+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \cdot (n-m) = \\ &= \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-m-1) \cdot (n-m)} \cdot (n-m) = \frac{n!}{(n-m-1)!} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zatem $L=P$ co kończy dowód.

Teza (4.2) twierdzenia 4 pokazuje rekurencyjny sposób wyliczania wartości S_k . Jeżeli teraz przyjmiemy, że $k=p-1$ oraz $n=N-2$, to otrzymamy:

$$(4.4) \quad S_p = \frac{(N-2)!}{(N-2-(p-1))!} = \frac{(N-2)!}{(N-p-1)!} = LP_{i,j}^p$$

Zatem, na mocy tezy twierdzenia 4 otrzymujemy rekurencyjną formułę na wyliczanie liczby $LP_{i,j}^p$ z (4.1):

$$(4.5) \quad \begin{cases} LP_{i,j}^p = 1, & \text{dla } p = 1 \\ LP_{i,j}^p = LP_{i,j}^{p-1} \cdot (N-p), & \text{dla } N-1 \geq p > 1 \end{cases}$$

Złożoność procedury (4.5) dla ustalonego p jest rzędu $\Theta(p)$, gdyż dla każdego p wykonywana jest stała liczba operacji (odejmowanie i mnożenie). Złożoność najgorszego przypadku wynosi $O(N)$.

Na mocy (4.1) oraz uwzględniając (3.4) otrzymujemy, że liczba wszystkich dróg prostych między ustaloną parą wierzchołków w G_F jest równa:

$$(4.6) \quad LP_{i,j} = \sum_{p=1}^{N-1} LP_{i,j}^p = \sum_{p=1}^{N-1} \frac{(N-2)!}{(N-p-1)!}$$

Problem polega na wyliczeniu wartości wyrażenia (4.6). Wykażemy, że:

$$(4.7) \quad \sum_{p=1}^{N-1} \frac{(N-2)!}{(N-p-1)!} = \sum_{p=1}^{N-1} \frac{\Gamma(N-1)}{\Gamma(N-p)} = e \cdot \Gamma_1(N-1, 1)$$

gdzie:

e – podstawa logarytmu naturalnego;

$\Gamma_1(a, z)$ - niepełna funkcja gamma Eulera o postaci,

$$(4.8) \quad \Gamma_1(a, z) = \int_z^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$

Należy zauważyć, że dla $z=0$ otrzymujemy funkcję gamma Eulera o postaci:

$$(4.9) \quad \Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$

która dla a naturalnych jest równa $\Gamma(a) = (a-1)!$.

Aby wykazać prawdziwość (4.7) skorzystamy ze wzoru na sumę następującego szeregu [8]:

$$(4.10) \quad \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} = e \cdot \frac{(1+n) \cdot \Gamma_1(n+1, 1)}{\Gamma(n+2)}$$

Formułę (4.7) zapiszemy w postaci dogodnej do skorzystania ze wzoru (4.10):

$$(4.11) \quad \sum_{p=1}^{N-1} \frac{(N-2)!}{(N-p-1)!} = (N-2)! \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{(N-p-1)!}$$

Jeżeli podstawimy w (4.10) za $i=N-p-1$, to korzystając z (4.11) zauważmy, że gdy weźmiemy pod uwagę występujący tam zakres sumowania:

- $p=1 \Rightarrow$ we wzorze (4.10) $i=N-2$ czyli $n=N-2$;
- $p=N-1 \Rightarrow$ we wzorze (4.10) $i=0$.

Ponadto uwzględniając, że $(N-2)! = \Gamma(N-1)$, wzór (4.11) możemy zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
(4.12) \quad & (N-2)! \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{(N-p-1)!} = \Gamma(N-1) \cdot e \cdot \frac{(1+(N-2)) \cdot \Gamma_1((N-2)+1,1)}{\Gamma((N-2)+2)} = \\
& = \Gamma(N-1) \cdot e \cdot \frac{(N-1) \cdot \Gamma_1(N-1,1)}{\Gamma(N)} = e \cdot \Gamma_1(N-1,1) \cdot \frac{(N-1) \cdot \Gamma(N-1)}{\Gamma(N)}
\end{aligned}$$

Ponieważ $\Gamma(N) = (N-1)!$, więc

$$(4.13) \quad \frac{(N-1) \cdot \Gamma(N-1)}{\Gamma(N)} = \frac{(N-1) \cdot (N-2)!}{(N-1)!} = \frac{(N-1)!}{(N-1)!} = 1$$

Zatem (4.12) możemy zapisać następująco:

$$(4.14) \quad (N-2)! \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{(N-p-1)!} = e \cdot \Gamma_1(N-1,1)$$

co jest zgodne z (4.7).

Korzystając z (4.7) i (4.8) możemy zapisać (4.6) następująco:

$$(4.15) \quad LP_{i,j} = e \cdot \Gamma_1(N-1,1) = e \cdot \int_1^{\infty} t^{N-2} e^{-t} dt$$

Biorąc pod uwagę, że [8]:

$$(4.16) \quad \int t^n e^{-t} dt = -t^n e^{-t} + n \cdot \int t^{n-1} e^{-t} dt$$

można dla liczby $LP_{i,j}$ z (4.15) również ustalić rekurencyjną formułę jej wyliczania (poprzez analogię do formuły (4.5)).

5. Wyniki oszacowań liczby dróg

W Tabeli 1 przedstawiono wyniki dotyczące szacowania liczby dróg między dowolną parą różnych wierzchołków i, j w pełnym grafie zwykłym. W Tabeli 2 przedstawiono wyniki dotyczące szacowania liczby dróg między dowolną parą różnych wierzchołków i, j w pełnym grafie Berge'a .

Z porównania obu tabel wynika, że liczba $LP_{i,j}$ dróg prostych dla pełnych grafów zwykłych i Berge'a jest identyczna, gdyż bez względu na to, czy

między dwoma wierzchołków grafu istnieje krawędź, czy para łuków przeciwnie skierowanych, to w każdej drodze prostej te dwa wierzchołki mogą wystąpić co najwyżej raz, wraz z jedną z gałęzi występujących między nimi.

Tabela 1

Wyniki szacowania liczby dróg między dowolną parą różnych wierzchołków i, j w pełnym grafie zwykłym

N	1	2	3	4	5	10	20	50	100
$LP_{i,j}$	0	1	2	5	16	109601	1.74×10^{16}	3.37×10^{61}	2.56×10^{154}
$\sum_{p=1}^{N-1} \hat{r}_{i,j}^p$	0	1	2	5	22	2351462	$>1.74 \times 10^{16}$	$>3.37 \times 10^{61}$	$>2.56 \times 10^{154}$
$\sum_{p=1}^{N-1} r_{i,j}^p$	0	1	2	10	68	43584805	$>1.74 \times 10^{16}$	$>3.37 \times 10^{61}$	$>2.56 \times 10^{154}$
$\sum_{p=1}^{N-1} q_{i,j}^p$	0	1	2	10	68	43584805	$>1.74 \times 10^{16}$	$>3.37 \times 10^{61}$	$>2.56 \times 10^{154}$

Tabela 2

Wyniki szacowania liczby dróg między dowolną parą różnych wierzchołków i, j w pełnym grafie Berge'a

N	1	2	3	4	5	10	20	50	100
$LP_{i,j}$	0	1	2	5	16	109601	1.74×10^{16}	3.37×10^{61}	2.56×10^{154}
$\sum_{p=1}^{N-1} \hat{r}_{i,j}^p$	0	1	2	5	22	2351462	$>1.74 \times 10^{16}$	$>3.37 \times 10^{61}$	$>2.56 \times 10^{154}$
$\sum_{p=1}^{N-1} r_{i,j}^p$	0	1	4	21	156	111111111	$>1.74 \times 10^{16}$	$>3.37 \times 10^{61}$	$>2.56 \times 10^{154}$
$\sum_{p=1}^{N-1} q_{i,j}^p$	0	2	10	100	1476	3.40×10^{11}	$>1.74 \times 10^{16}$	$>3.37 \times 10^{61}$	$>2.56 \times 10^{154}$

Z kolei oszacowanie $\sum_{p=1}^{N-1} \hat{r}_{i,j}^p$ w Tabeli 1 oraz Tabeli 2 jest również identyczne.

Ten fakt jest także oczywisty, gdyż macierz \mathbf{R} dla grafu zwykłego (na bazie której wyliczamy elementy macierzy $\hat{\mathbf{R}}$) różni się od macierzy \mathbf{R} dla grafu

Berge'a tylko elementami zerowymi na głównej przekątnej, która i tak jest zerowa dla obu grafów przy ich reprezentacji za pomocą macierzy $\hat{\mathbf{R}}$. Ponadto oszacowanie $LP_{i,j}$ od góry za pomocą $\sum_{p=1}^{N-1} \hat{r}_{i,j}^p$ jest dużo lepsze niż za pomocą

$$\sum_{p=1}^{N-1} r_{i,j}^p \text{ czy } \sum_{p=1}^{N-1} q_{i,j}^p. \text{ Spełniona jest zatem, co nie jest zaskoczeniem, zależność} \\ (3.3).$$

5. Wnioski

W pracy podano postać oszacowań oraz dokładnych wyliczeń (dla grafów pełnych) liczby dróg w grafach. Skupiono się przy tym na grafach pełnych. Problemem, który nawiązuje do rozważanego jest polepszanie oszacowań na liczbę dróg w dowolnym grafie. W tym kontekście oraz biorąc pod uwagę zależność (3.3) można stwierdzić, że oszacowanie liczby dróg w

dowolnym grafie G może być następujące: $LP_{i,j} \leq \min \left\{ LP_{i,j}^F, \sum_{p=1}^{N-1} \hat{r}_{i,j}^p \right\}$, gdzie

$LP_{i,j}^F$ oznacza liczbę dróg w grafie pełnym w danej klasie grafów. Jeżeli graf G jest grafem zwykłym, to wcześniejsze oszacowanie będzie wyglądać

następująco:
$$LP_{i,j} \leq \min \left\{ \sum_{p=1}^{N-1} \frac{(N-2)!}{(N-p-1)!}, \sum_{p=1}^{N-1} (N-1)^{p-1} \right\}. \quad \text{Ciekawym}$$

problemem może być problem szacowania liczby dróg w grafach r -regularnych, tzn. takich, w których każdy wierzchołek jest połączony z r innymi wierzchołkami (szczególnym przypadkiem grafu r -regularnego jest np. graf pełny w klasie grafów zwykłych, który jest $(N-1)$ -regularny). Ponadto interesujące jest rozpatrywanie liczby dróg w szczególnych grafach, tzw. kratkach, które są wykorzystywane jako modele sieci połączeń w systemach przetwarzania równoległego [13] lub jako modele terenu w wojennych grach symulacyjnych [10]. W pracach [1], [6] rozpatruje się np. problem zliczania liczby najkrótszych dróg w kracie, która może być modelem sieci dróg w obszarze podzielonym na prostokątne kwartały. Innym problemem może być szacowanie liczby dróg przechodzących przez wybrane wierzchołki. O tych i innych problemach traktuje m.in. praca [11].

Literatura

- [1] BRYANT V.: *Aspects of Combinatorics*, University Press, Cambridge 1993.
- [2] DEO N.: *Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce*, PWN, Warszawa 1980.
- [3] KORZAN B., *Elementy teorii grafów i sieci. Metody i zastosowania*, WNT, Warszawa 1978.
- [4] KUBALE M. (red.): *Optymalizacja dyskretna. Modele i metody kolorowania grafów*, WNT, Warszawa 2002.
- [5] KULIKOWSKI J.L.: *Zarys teorii grafów*, PWN, Warszawa 1986.
- [6] PALKA Z., RUCIŃSKI A.: *Wykłady z kombinatoryki, cz.I, Przeliczanie*, WNT, Warszawa 1998.
- [7] PAPADIMITRIOU CH., H.: *Złożoność obliczeniowa*, WNT, Warszawa 2002.
- [8] *PORADNIK INŻYNIERA. MATEMATYKA, cz.I*, WNT, Warszawa 1986.
- [9] TARAPATA Z.: *Some aspects of multi-convoy redeployment modelling and simulation*, Proceedings of the 21st AFCEA Europe Symposium & Exposition, 18-20 October, Prague 2000 (CD publication).
- [10] TARAPATA Z.: *Military route planning in battlefield simulation: effectiveness problems and potential solutions*, Proceedings of The Regional Conference on Military Communication and Information Systems, 04-06 October, Zegrze (Poland) 2002, vol.I, 191-200.
- [11] TARAPATA Z.: *Zliczanie dróg w grafach regularnych*, Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa 2003 (w przygotowaniu).
- [12] WILSON R.J.: *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, Warszawa 1998.
- [13] WOŹNIAK M.: *Wprowadzenie do problemów komunikacji w grafach*, Wydawnictwo AGH, Kraków 1999.

On problem of paths counting in graphs

In the paper the problem of paths counting in the graphs is considered. Estimations of number of paths and simple paths in the simple graphs and Berge's graphs are given. It is proved that for full graphs number of simple paths between any pair of nodes is equal number of some variations without repetitions. Recurrent formulas for paths counting and their computational complexities are given. Some results of estimation of number of simple paths for selected graphs are presented. Finally, some conclusions and applications of presented estimations are indicated.